الدكتور موفق دعبول

استاذ في كلية العلوم
جامعة دمشق

نظرية المعادلات

المقدمة

إن هذا الكتاب هو نتيجة للمحاضرات التي القيتها في مقرر نظرية المعادلات على طلاب السنة الرابعة في كلية العلوم بجامعة دمشق خلال السنوات الخمس الأخيرة ، وقد تم اعداده بحيث يكون منسجماً مع منهاج هذا المقرر كما أقره جمس التعليم العالي في مطلع عام ١٩٨٤ .

إن الموضوع الرئيسي في هذا الكتاب هو نظرية المعادلات التفاضلية العادية ، لذلك فهو يعتبر تتمة لكتابي المعادلات التفاضلية المقررين لطلاب السنة الثانية في كلية العلوم .

يفترض في القارىء هذا الكتاب أن يكون مطلعاً على مبادىء التحليل الرياضي وعلى نظرية الدوال العقدية (وبشكل خاص على الابحاث المتعلقة بالتوابع الهولومورفية والنقط الشاذة والتمديد التحليلي) ، إضافة الى المعلومات الأساسية في مكاملة المعادلات التفاضلية العادية .

ولما كانت أحدث الطرق في اثبات نظريات الوجود والوحدانية تعتمد على نظرية النقطة الثابتة في التحليل الدالي ، فإني وجدت من المناسب تصدير الفصل

الأول بحديث موجز حول فضاء باناخ وصولاً إلى هذه النظرية الهامة من نظريات التحليل الدالي .

ونلاحظ في دراسة المعادلات التفاضلية الخطية في الفصل الثاني أن المتغير والدالة عقديان ، رغم أن المعادلات التفاضلية التي نصادفها في التطبيقات تعالج دوالاً حقيقية بتغيرات حقيقية . إن سبب هذا التوسع هو أن يكون بمقدورنا الاستفادة من العديد من افكار نظرية الدوال مثل نقط التفرع والتمديد التحليلي والتكاملات المحيطية ، الأمر الذي يجعل البراهين مختصرة ومتطورة .

وكانت تطبيقاتنا في هذا الفصل منصبة بالدرجة الأولى على المعادلات التفاضلية الهامة في الفيزياء مثل معادلة غوص ومعادلة لوجاندر ومعادلة بسل ، هذه المعادلات التي تخضع لها ظواهر فيزيائية عديدة وهامة .

وحيث أن هذا الكتاب الجامعي قد وضع ليلقى على الطلاب خلال فترة زمنية معينة (أربع محاضرات اسبوعية في فصل دراسي واحد فإن المعالجة في بعض فصوله وخاصة في الفصلين الثالث والأخير جاءت مختصرة . إن معالجة تامة لابحاث هذا الفصل تخرج بنا عن المنهاج المقرر ، ومن الصعب جداً تغطيتها في الوقت المخصص له . وما جاء في الفصل الأخير من بحث في المعادلات التكاملية الخطية انما يهدف فقط إلى تعريف القارىء بهذه المعادلات وبحلولها في حالات بسيطة ، ولا بد من يرغب بمعالجة شاملة للموضوع أن يعود إلى كتب اخرى متخصصة في المعادلات التكاملية .

وأخيراً أود أن أشير إلى أن هذا الكتاب هو محاولتي الأولى في الكتابة

في موضوع نظرية المعادلات ، ولذلك فإنني أكون شديد الامتنان إلى زملائي الأعزاء من اساتذة وطلاب ، الذين يتكرمون بتقديم ملاحظاتهم حول ماجاء فيه . ان هذه الملاحظات ستكون عوناً لي عند اعادة طبعه إذا استمرت الحاجة اليه .

المؤلف



منهج مقرر نظرية المعادلات

١ ـ نظرية الوجود والوحدانية للمعادلات التفاضلية .

٢ ـ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ، الحل في جوار نقطة منتظمة وفي جوار نقطة شاذة منتظمة ، تمثيل الحلول بتكاملات محيطية، النشر المقارب ، تطبيقات في المعادلة فوق الهندسية ، معادلة لوجاندر ، معادلة بسل .

٣ ـ النظرية الوصفية للمعادلات التفاضلية غير الخطية .

٤ ـ مسائل القيم الحدية والقيم الذاتية ، استقرار الحلول .

٥ ـ لمحة في المعادلات التكاملية ، معادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا

الفصل الأول

مبرهنة وجود الحل ووحدانيته

١ ـ مقدمة في التحليل الدالي :

ان بعض المفاهيم العامة التي ترد في ابحاث التحليل الدالي ، يمكن أن تساعد في معالجة العديد من مسائل نظرية المعادلات التفاضلية بشكل يوفر الجهد والتعب .

وقبل استخدام بعض طرق التحليل الدالي في معالجة مبرهنات الوجود والوحدانية لحلول المعادلات التفاضلية سنتعرض بشكل سريع إلى فضاء باناخ .

(١ ـ ١) الفضاء الخطي : نقول عن مجموعة $L = \{a, b, c, ..\}$ أنها فضاء خطي (أو فضاء متجهي خطي أو فضاء متجهي) إذا عرفنا في L عملية جمع وعملية ضرب بسلميات ، يمكن أن تكون أعداداً حقيقية أو عقدية (نعني بهذا اننا نقابل كل زوج a, b من عناصر L بعنصر وحيد $a + b$ من L كما نقابل كل عنصر a من L وعدد λ بعنصر وحيد λa من L أيضاً ، على أن تخضع هاتان العمليتان إلى القواعد التالية :

(١) L هي زمرة تبادلية فيما يتعلق بعملية الجمع . فإذا رمزنا للعنصر الحيادي بـ θ ولنظير a بـ $-a$ فانه ، مهما كانت العناصر a, b, c من L ، يكون :

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + b = b + a$$

$$a + \theta = a$$

$$a + (-a) = \theta$$

اما الضرب بسلميات فإنه يحقق ، مهما كان العنصران a,b من L ومهما كان العددان μ , λ ، القواعد التالية :

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$$

$$(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$$

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a$$

$$1 . a = a$$

ونصف الفضاء الخطي بأنه حقيقي أو عقدي حسبما تكون السلميات ... ,λ,μ من حقل الأعداد الحقيقية أو من حقل الأعداد العقدية .

ونقول عن جزء غير خال من L انه فضاء جزئي (خطي) من L فيما إذا شكل (مع عمليتي الجمع والضرب بسلميات) فضاء خطياً كذلك .

(١ ــ ٢) الفضاء المنظم : ليكن L فضاء خطياً حقيقياً أو عقدياً . نقول عن L انه فضاء خطي منظم إذا ارفقنا بكل عنصر a من L عدداً حقيقياً غير سالب $\|a\|$ ، نسميه نظيم a ، بحيث يتحقق مايلي .

$$\|a\| = 0 \Rightarrow a = \theta$$

$$\|\lambda a\| = |\lambda| . \|a\|$$

$$\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\| \qquad \text{(متباينة المثلث)}$$

ويقال احياناً ان الفضاء L منظم بـ $\|.\|$.

سنحتاج فيما بعد إلى النتيجتين البسيطتين التاليتين :

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \leqslant \|x_1\| + \ldots + \|x_n\| \qquad (1)$$

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\| \qquad (2)$$

اللتين يمكن استخراجهما بسهولة من متباينة المثلث .

لنذكر كذلك ان النظيم يعرف مسافة $\rho(x,y) = \| x - y \|$ بالخصائص التـــالية :

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0 \qquad x \neq y$$

$$\rho(x, x) = 0$$

متباينة المثلث $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

وهكذا نرى أن كل فضاء منظم هو أيضاً فضاء متري . وعلى هذا يمكننا أن ننقل بسهولة من الفضاءات المترية إلى الفضاءات المنظمة تلك المصطلحات مثل : جوار ، نقطة داخلية ، نقطة محيطة ، مجموعة مغلقة ، مجموعة مفتوحة ...

(١ — ٣) امثلة (آ) **الفضاء الاقليدي** $\mathbb{R}^n$. نفهم من ذلك مجموعة العناصر :

$$a = (a_1, \dots, a_n) = (a_i) \quad a_i \in \mathbb{R}$$

التي نعرف عليها عملية الجمع والضرب بسلمية حقيقية λ بـ :

$$a + b = (a_i + b_i) \qquad \lambda a = (\lambda a_i)$$

يمكن تنظيم $\mathbb{R}^n$ باشكال مختلفة مثل :

مسافة اقليدس $|a|_e = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$

$$|a| = |a_1| + \dots + |a_n|$$

$$|a| = \max_i |a_i|$$

سنشير الى عناصر $\mathbb{R}^n$ فيما يلي بخط غامق والى نظـــام $\mathbb{R}^n$ بخطي القيمة المطلقة فقط .

(ب) **الفضاء العقدي، ذي البعد** n ، $\mathbb{C}^n$. ونعرفه كما عرفنا $\mathbb{R}^n$ على أن تكون a_i و λ عقدية . ومسافة اقليدس تأخذ الشكل :

$$| a |_0 = \sqrt{| a_1 |^2 + \dots + | a_n |^2}$$

(حـ) ليكن G جزءاً متراصاً من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $C(G)$ مجموعة جميع الدوال المستمرة على G التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$: $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. ولنعرف الجمع $h = f + g$ بالشكل :

$$h(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall \; f, g \in C(G)$$

والضرب بسلمية حقيقية λ بالشكل :

$$k(x) = \lambda . f(x) \qquad \forall f \in C(G)$$

وأما النظيم فيمكننا أن نختاره على النحو :

نظيم القيمة العظمى $\quad \| f \|_0 = \max \{ | f(x) | : x \in G \}$

أو على النحو :

نظيم القيمة العظمى المحملة $\quad \| f \|_1 = \sup \{ | f(x) | \, p(x) : x \in G \}$

بفرض أن $p(x)$ دالة معينة مفروضة وأن $0 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty$

(د) يستخدم المثال الأخير في دراسة المعادلات التفاضلية في العقدية . فإذا كانت G منطقة في المستوي العقدي C وكانت $H_0(G)$ مجموعـة الدوال التحليلية على G والمحدودة $u(z) : G \to C$. وإذا فرضنا $p(z)$ دالة معرفـة على G وذات قيم حقيقية وأن $0 < \alpha \leqslant p(z) \leqslant \beta$ حيث يكون α و β ثابتين موجبين مناسبين ، فإن :

$$\| u \| = \sup_G | u(z) | \, p(z)$$

هو نظيم في $H_0(G)$.

يمكن في جميع هذه الأمثلة التحقق من صحة شروط النظيم بسهولة .

(١ ـ ٤) فضاء باناخ : فضاء باناخ هو **فضاء خطي** منظم تام ، فهو إذن مجموعة مع الخصائص الواردة في (١ ـ ١ ، ٢) ، مضافاً لذلك : كل متتالية كوشية من عناصر L هي متتالية متقاربة في L (وذلك بفرض أن المسافة معرفة بالنظيم ، ولذلك فإن هذا التقارب يوصف بانه تقارب نظيمي) .

ان المثالين الواردين في (آ) و (حـ) من (١ ـ ٣) يعطياننا مثالين لفضاءي باناخ حقيقيين ، أما المثالان الواردان في (ب) و (د) فيقدمان فضاءي باناخ عقديين . وخاصة التمام في المثالين الأول والثاني فتنشأ عن كون كل من فضاء الأعداد الحقيقية وفضاء الاعداد العقدية تاماً .

أما إذا أخذنا في المثال الثالث نظيم القيمة العظمى $\|f\|_0$ فعندئذ يكون التقارب النظيمي لايختلف عن التقارب المنتظم في G . وفي الواقع إذا كانت (f_n) متتالية كوشية فإن $\|f_n - f_m\|_0 < \epsilon$ عندما $m,n \geqslant n_0$ لاتختلف عن :

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \qquad m,n \geqslant n_0 \ ، \ \forall x \in G \qquad (*)$$

وعندئذ ينتج التمام من المبرهنة المشهورة وهي أن نهاية متتالية متقاربة بانتظام لدوال مستمرة هي بحد ذاتها دالة مستمرة وعلى هذا فهناك دالة f مستمرة على G بحيث يكون $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ بانتظام في G وإذا تركنا x و n ثابتين وجعلنا في ($*$) $m \to \infty$ فإننا نجد :

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon \qquad n \geqslant n_0 \qquad x \in G$$

ومنه $\|f_n - f\|_0 \leqslant \epsilon$ عندما $n \geqslant n_0$. وبهذا نجد أن $f_n \to f$ نظيمياً ، وهذا يعني أن $C(G)$ تام .

وبهذا الاسلوب نجد ان النتيجة تبقى صحيحة في حالة النظيم $\|f\|_1$. وذلك لأنه إذا كان $\beta \geqslant p(x) \geqslant \alpha > 0$ في G فإن :

$$\alpha \|f\|_0 \leqslant \|f\|_1 \leqslant \beta \|f\|_0$$

فالنظيمان اذن متكافئان . وهذا يعني أن التقارب وفق نظيم القيمة العظمى يحدث إذا واذا فقط حدث التقارب وفق النظيم $\|\cdot\|_1$.

ويمكن ايضاً بشكل مماثل اثبات التمام في المثال (د) انما باستخدام المبرهنة التي تقول ان نهاية متتالية الدوال التحليلية المتقاربة بانتظام هي دالة تحليلية ايضاً .

(١ ـ ٥) المؤثرات والدالليات ، الاستمرار وشرط ليبشتز :

ليكن E , F فضاءين منظمين حقيقيين أو عقديين وليكن D جزءاً من E ولتكن $T : D \to F$ دالة . لقد جرت العادة على تسمية مثل هذه الدالة مؤثراً . وإذا كان $F = \mathbb{R}$ أو $F = \mathbb{C}$ فلقد جرت العادة على تسمية مثل هذا المؤثر دالياً .

ونقول عن مؤثر $T : D \to F$ انه خطي فيما إذا كان D فضاء خطياً جزئياً من E وكان $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$ وذلك مهما كان x , y من D ومهما كان μ, λ من $\mathbb{R}$ أو من $\mathbb{C}$.

هذا وكثيراً مانكتب Tx بدلاً من $T(x)$.

نقول عن المؤثر $T : D \to F$ إنه مستمر في الموضع x_0 من D إذا كان :

$$x_n \in D \qquad x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to T x_0$$

وهذا يكافىء مايلي : مهما كان العدد الموجب ϵ فإنه يوجد عدد موجب δ بحيث يكون $\|T x - T x_0\| < \epsilon$ وذلك عندما يكون $\|x - x_0\| < \delta$ وبفرض أن x من D .

ونقول عن مؤثر T انه يحقق في D شرط ليبشتز فيما إذا وجدت ثابتة k تسمى ثابتة ليبشتز بحيث يكون :

$$\| Tx - Ty \| \leqslant k \| x - y \| \qquad x, y \in D \qquad (3)$$

ويمكن للمرء أن يلاحظ بسهولة أن مثل هذا المؤثر مستمر في D .

لنلاحظ اننا استخدمنا في (3) النظيمين في E و F رغم أننا استخدمنا لهما الرمز ذاته ، وذلك لأننا سنأخذ في تطبيقاتنا E = F على الأغلب .

ملاحظات : إذا حقق T شرط ليبشتز فإنه يوجد دائماً ثابتة ليبشتز صغرى . لأنه إذا كانت k_0 الحد الأدنى لجميع الأعداد k التي تصح لأجلها (3) (وذلك مهما كان x و y من D) فإن (3) تصح كذلك لأجل x و y ثابتة عندما نضع k_0 بدلاً من k .

وإذا كان T خطياً فمن الممكن ان يقتصر المرء في (3) على الحالة y = 0 لأنه ينتج من (3) أن :

$$\| Tx \| \leqslant k \| x \| \qquad x \in D \qquad (3')$$

وتسمى ثابتة ليبشتز الصغرى في هذه الحالة « نظيم T » ويرمز لها بـ $\| T \|$.

(١ – ٦) امثله : (آ) إذا كان $E = F = \mathbb{R}$ فإن المؤثر T هو الدالة الحقيقية لمتغير حقيقي .

(ب) ليكن $D = E = C(J)$ وذلك بفرض أن $J = [a, b]$ وأن $F = \mathbb{R}$. وليكن :

$$Tf = \int_a^b f(t)\, dt$$

ومن الواضح أن T دالي خطي يحقق شرط ليبشتز (3) بثابتة $k = b - a$ ، وذلك عندما نأخذ القيمة المطلقة نظيماً في $\mathbb{R}$ ونأخذ في E نظيم القيمة العظمى .

(ﻫ) ليكن $D = E = F = C(J)$ وليكن :

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

إن المؤثر T خطي ويحقق شرط ليبشتز (3) بثابتة $k = b - a$ وذلك بفرض أن النظيم هو نظيم القيمة العظمى . أما إذا كان النظيم هو نظيم القيمة العظمى المحملة بفرض أن $p(x) = e^{-x}$ فإن $k = 1 - e^{-(b-a)}$.

(ث) لننظر في الدالي $Tx = \|x\|$ من E إلى $\mathbb{R}$. ينتج من (2) مباشرة أن شرط ليبشتز محقق بفرض أن $k = 1$

وعلى هذا فإننا نرى أن النظيم في E هو دالي مستمر ، بل ويحقق شرط ليبشتز بثابتة $k = 1$.

(١ ــ ٧) الاسلوب التكراري في فضاءات باناخ : إن العديد من مسائل الوجود في التحليل بما في ذلك ، كما سنرى ، مسألة وجود الحل للمعادلات التفاضلية العادية ، يمكن أن يوضع في فضاء باناخ B مناسب ، على شكل معادلة من النمط :

$$x = Tx \qquad (4)$$

وذلك بفرض أن T مؤثر من D إلى B وحيث أن D جزء من B . نسمي كل حل لـ (4) نقطة ثابتة لـ T . أي أن هذا الحل هو نقطة تبقى بالتطبيق $x \to Tx$ ثابتة .

وللحصول على نقطة ثابتة نستعمل غالباً اسلوباً تكرارياً نسميه عادة اسلوب

التقريب المتتالي ، ننطلق فيه من عنصر x_0 من D ثم نشكل على التتالي العناصر:

$$x_1 = T x_0 , x_2 = T x_1 , \dots x_{n+1} = T x_n , \dots \qquad (5)$$

والسؤال الأساسي هو : متى تتقارب هذه المتتالية إلى حل المعادلة (4) • إن الجواب على هذا السؤال نجده في المبرهنة التالية :

(١ ـ ٨) مبرهنة النقطة الثابتة : لتكن D مجموعة غير خالية ومغلقة وجزئية من فضاء باناخ B . وليكن المؤثر $T : D \to D$ ، أي $T(D) \subset D$ ، ولنفرض أن هذا المؤثر يحقق في D شرط ليبشتز بثابتة $k < 1$ أي :

$$\| Tx - Ty \| \leqslant k \| x - y \| \qquad x, y \in D \qquad (3)$$

عندئذ يكون للمعادلة (4) حل وحيد . $x = \bar{x}$ في D . وإذا شكل المرء انطلاقاً من عنصر كيفي x_0 من D التقريبات المتتالية x_n وفق (5) ، فعندئذ يصح :

$$\| \bar{x} - x_n \| \leqslant \frac{k^n}{1 - k} \| x_1 - x_0 \| \qquad (6)$$

وبشكل خاص تتقارب المتتالية (x_n) نحو $\bar{x}$ نظيمياً .

البرهـان : إن الطلب الأخير واضح لأن $k^n \to 0$. كذلك يمكننا أن نثبت بسهولة أن حل المعادلة (4) وحيد اعتماداً على (3) . فإذا فرضنا $x = Tx$ و $y = Ty$ فعندئذ يكون :

$$\| x - y \| \leqslant k \| x - y \| \qquad k < 1$$

ولكن هذه المتباينة لاتصح إلا إذا كان $\| x - y \| = 0$ ، أي إذا كان $x = y$.

لنلاحظ بعد ذلك انه طالما $T(D) \subset D$ فإنه إذا كان $x_n \in D$ فإن $x_{n+1} \in D$ وبالتالي فانه يمكن انشاء المتتالية (x_n) استناداً إلى (5) . ان هذه المتتالية تقع في D .

لنبرهن بعد ذلك :

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant k^n \| x_1 - x_0 \| \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad (7)$$

إن هذه المتباينة صحيحة لأجل $n = 0$. لنفرض انها صحيحة لأجل الدليل n ونثبت صحتها لأجل الدليل $n+1$. نلاحظ في سبيل ذلك وبالاعتماد على (3) أن

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| = \| Tx_{n+1} - Tx_n \| \leqslant k \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant k^{n+1} \| x_1 - x_0 \|$$

وهذا يعني أن (7) صحيحة لأجل الدليل $n+1$.

وبالإعتماد على (7) وعلى متباينة المثلث (1) ، وبفرض أن $p > 0$ نجد :

$$\| x_{n+p} - x_n \| = \| (x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \dots + (x_{n+p} - x_{n+p-1}) \|$$

$$\leqslant \| x_{n+1} - x_n \| + \| x_{n+2} - x_{n+1} \| + \dots + \| x_{n+p} - x_{n+p-1} \|$$

$$\leqslant (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+p-1}) \| x_1 - x_0 \| \leqslant \frac{k^n}{1-k} \| x_1 - x_0 \|$$

إذن :

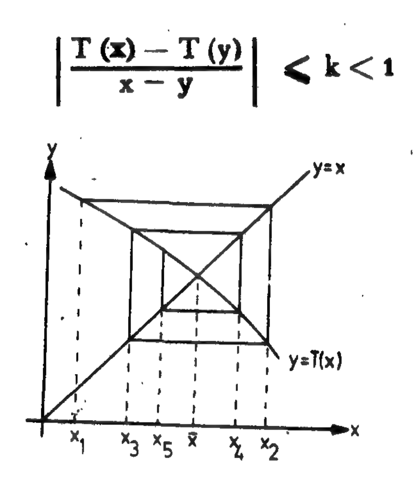
$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant c\, k^n \quad ; \quad c = \frac{\| x_1 - x_0 \|}{1-k} \quad (n, p \geqslant 0) \qquad (8)$$

فالمتتالية (x_n) هي كوشية ولها ، استناداً إلى خاصة التمام في فضاء باناخ ، نهاية $\bar{x}$ في B وبالانتقال إلى النهايات في (8) بجعل n ثابتة و $p \to \infty$ ، فإننا نحصل ، بعد ملاحظة أن النظيم مستمر ، على المتباينة (6) . ولما كانت D مغلقة فإن $\bar{x} \in D$.

واخيراً نرى أن $\bar{x}$ نقطة ثابتة لـ T بملاحظة أن T مستمر . ذلك لأنه من $x_n \to \bar{x}$ ينتج من جهة أن $Tx_n \to T\bar{x}$ ، وينتج من جهـــة اخرى أن $Tx_n = x_{n+1} \to \bar{x}$ أي أن $\bar{x} = T\ \bar{x}$ وهو المطلوب .

(١-٩) **ملاحظات** (آ) في الحالة الخاصة $B = \mathbb{R}$ يكون من السهل تتبع الاسلوب التكراري . لنفرض لأجل ذلك أن T دالة حقيقية لمتغير حقيقي x ، وأنها مثلاً معرفة في فترة $D = [a,b]$. عندئذ يكون استناداً إلى الفرض $T(D) \subset D$ أن $a \leqslant T(x) < b$ مهما كانت x من D . وأما شرط ليبشتز (3) فلا يختلف في هذه الحالة عن :

$$\left| \frac{T(x) - T(y)}{x - y} \right| < k < 1$$



الأسلوب التكراري في الحالة $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

فإذا فرضنا أن لـ T مشتقاً مستمراً على D فعندئذ يكون شرط ليبشتز الأخير مكافئاً للشرط $| T'(x) | \leqslant k$ في D . ويقابل الحل $\bar{x}$ للمعادلة $x = T(x)$ هندسياً فصل نقطـــة تقاطع المستقيم المعرف بـ $y = x$ مـع المنحني المعرف بـ $y = T(x)$. واذا نظرنا في الحـــالات $-1 < T'(x) < 1$ و $T'(x) \geqslant 1$ و $T'(x) \leqslant -1$ فإننا نلاحظ هندسياً أن اسلوب التقريب المتتالي يتقارب في الحالة

الأولى في حين يتباعد في الحالتين الثانية والثالثة .

(ب) إذا حققت الدالة T شرط ليبشتز (3) بفرض أن $k < 1$ فإن هـذا يعني هندسياً أن المسافة بين الصورتين Tx و Ty أصغر من النقطتين x و y . يقال عن مثل هذه الدوال انها تقاصية وعلى هذا فإن المبرهنة (١-٨) تبحث في مبرهنة النقطة الثابتة في التطبيقات التقاصية

تمارين : (آ) لتكن $M \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة كيفية ولتكن $P: M \to \mathbb{R}$ دالة موجبة ومستمرة ، وليكن $C(M)$ فضاء خطياً حقيقياً أو عقدياً للدوال المستمرة $M \to \mathbb{R}$ أو $M \to C$. أثبت أن المجموعة الجزئية $C(M,P)$ لجميع الدوال $f \in C(M)$ التي يكون فيها :

$$\| f \| = \sup \{ | f(x) | P(x) | x \in M \}$$

منتهياً تشكل مع هذا النظيم فضاء باناخ حقيقياً أو عقدياً .

ارشاد : ان كل متتالية كوشية بخصوص هذا النظيم تكون متقاربة بانتظام موضعياً ، أي أنه يوجد لكل نقطة x من M جوار $U(x)$ بحيث يصح في الجوار $U(x) \cap M$ التقارب المنتظم . وعلى المرء أن لايفوته الاثبات أن $C(M,P)$ فضاء خطي وليلاحظ أن هذه المبرهنة لاتكون صحيحة إذا كان لـ P مواضع صفرية . انظر (ب) .

(ب) ليكن L فضاء الدوال f لمتغير حقيقي x والمستمرة على $0 \leqslant x \leqslant 1$ لنفرض أن $\| f \| = \max | x^2 f(x) |$. اثبت أننا بذلك نكون قد عرفنا نظيما ، ولكن L غير تام .

ارشاد : ادرس المتتالية f_n المعرفة بـ :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{n} < x < 1$$

$$f_n(x) = n \qquad 0 \leqslant x < \frac{1}{n}$$

(ﺣ) لتكن $C(M,P)$ فضاء باناخ المعروف بـ (آ) ولتكن ψ ، φ دالتين معرفتين على M بقيم حقيقية وأن $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$. اثبت أن مجموعة جميع $f \in C(M,P)$ بحيث يكون $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ مهما كان x من M مغلقة .

(د) لنعرف في $C(J)$ ، بفرض أن $J=[0,a]$ ، النظائم الثلاثة :

نظيم القيمة العظمى $\|f\|_0$ والنظيمين :

$$\|f\|_1 = \max_J |f(x)| e^{-ax} \qquad \|f\|_2 = \max_J |f(x)| e^{-x^2}$$

وليكن المؤثر T المعروف بـ :

$$(Tf)(x) = \int_0^x t f(t) dt$$

احسب لأجل هذا المؤثر النظائم $\|T\|_2$ ، $\|T\|_1$ ، $\|T\|_0$.

(ﻫ) اثبت أن للمعادلة التكاملية :

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \int_0^x t\, y(t) dt \quad , \quad x \in J = [0,a]$$

حلاً وحيداً فقط وعين هذا الحل بطريقتين : الأولى بالعودة إلى مسألة قيم ابتدائية والثانية بحساب صريح للتقريبات المتتالية وذلك باستخدام (د) مبتدئاً بـ $y_0=0$

(و) لنعرف في مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق باستمرار مرة واحدة على J ، بفرض أن $J=[a,b]$ ، نظيم القيمة العظمى $\|f\|_0$ و $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$. اثبت أن هذا الفضاء مع النظيم $\|.\|_1$ هو فضاء باناخ

ولكنه مع النظيم ‖ . ‖ لايشكل فضاء باناخ .

٢ ــ مبرهنة الوجود والوحدانية

إن جميع الدوال التي سنصادفها في هذا البند هي دوال بقيم حقيقية . لننظر في مسألة القيم الابتدائية التالية :

$$y' = f(x,y) \quad \text{لأجل} \quad \xi \leqslant x \leqslant \xi + a$$

$$y(\xi) = \eta \qquad (1)$$

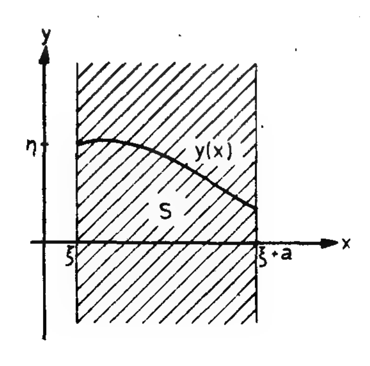
إن من أهم شروط المبرهنة التالية أن تكون f معرفة في شريط S :

$\xi \leqslant x \leqslant \xi + a, -\infty < y < \infty$ وتحقق ، فيما يتعلق بـ y ، شرط ليبشتز :

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leqslant L\,|y - \bar{y}| \quad (L \geqslant 0) \qquad (2)$$

حيث لاتخضع ثابتة ليبشتز الحقيقية L إلى أي قيد .

(٢ ــ ١) مبرهنة الوجود والوحدانية . لنفرض أن الدالة $f \in C(S)$ تحقق في S شرط ليبشتز (2) . عندئذ يكون لمسألة القيم الحدية (١) حل وحيد $y(x)$. إن هذا الحل يوجد في كامل الفترة $\xi \leqslant x \leqslant \xi + a$.



لاثبات هذه المبرهنة نحيلها إلى مبرهنة النقطة الثابتة . وعلينا ، في سبيل ذلك ، أن نضع مسألة القيم الابتدائية بتطوير بسيط في الشكل $y = Ty$. لنرمز بـ J للفترة $\xi < x \leq \xi + a$ ، وليكن $y(x)$ حلاً فضولاً في J لمسألة القيم الابتدائية . ولما كان f مستمراً فإن $u(x) = f(x, y(x))$ مستمر في J ، وبالتالي يكون لـ $y(x)$ مشتق مستمر .

وبالاستناد إلى المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل ينتج .

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))\, dt \qquad (3)$$

وبالعكس فإن كل حل مستمر في J لـ (3) يحقق شرط البدء $y(\xi) = \eta$ ، كما أن الطرف الأيمن من (3) ، وبالتالي لـ $y(x)$ ، مشتقاً مستمراً وأن $y' = f(x, y)$. وهكذا نرى أن مسألة القيم الابتدائية لاتختلف عن المعادلة التكاملية (3) ، والتي نضعها بالشكل :

$$y = T(y) \qquad (3')$$

$$(Ty)(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

إن المؤثر التكاملي T يقرن بكل دالة y من فضاء باناخ $C(J)$ للدوال المستمرة في J ، دالة Ty من الفضاء نفسه .

وعلى هذا فإن حلول مسألة القيم الابتدائية (1) هي أيضاً النقط الثابتة للمؤثر T ، باعتباره التطبيق $T: B \to B$ وباعتبار $B = C(J)$.

ولذلك إذا أثبتنا أن المؤثر T يحقق شرط ليبشتز *(1,3) بثابتة $k < 1$ فإننا نكون بذلك قد اثبتنا المبرهنة التي نحن بصددها .

(*) يشير الرقم الايسر من هذه الثنائية الى البند ويشير الرقم الثاني الى المعادلة

لننظم الفضاء $C(J)$ بنظيم القيمة العظمى $\|y\|_0 = \max\{|y(x)| : x \in J\}$
ولنفرض $y, z \in C(J)$ ، عندئذ ، استناداً إلى (2) ، ينتج :

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| = \left| \int_{\xi}^{x} \{f(t, y(t)) - f(t, z(t))\} dt \right|$$

(4)

$$\leqslant \int_{\xi}^{x} L\, |y(t) - z(t)|\, dt \leqslant L \|y - z\|_0 (x - \xi)$$

وبالتالي فإن :

$$\|Ty - Tz\|_0 \leqslant La \|y - z\|$$

وعلى هذا فإن T يحقق شرط ليبشتز . ولكن ثابتة ليبشتز لاتكون أصغر من الواحد إلا إذا كان $a < \frac{1}{L}$. فـإذا كان $a \geqslant \frac{1}{L}$ فعندئذ نختار n بحيث يكون $b = \frac{a}{n} < \frac{1}{L}$ ونبحث عن الحل بالاسلوب السابق ذاته في الفترات التالية:

$$\xi \leqslant x \leqslant \xi + b, \xi + b \leqslant n \leqslant \xi + 2b, \ldots, \xi + (n-1)b \leqslant x \leqslant \xi + nb = \xi + a$$

على التوالي (انظر (٢ ـ ٦) (ب)) .

ويمكن سلوك سبيل انيق آخر باختيار نظيم القيمة العظمى المحملة :

$$\|y\| = \max\{|y(x)|\, e^{-\alpha x} : x \in J\} \quad \alpha > 0 \tag{5}$$

وبتقويم التكامل الاخير في (4) في هذه الحالة نجد :

$$\int_{\xi}^{x} L\, |y(t) - z(t)|\, dt = L \int_{\xi}^{x} |y(t) - z(t)|\, e^{-\alpha t} e^{\alpha t}\, dt$$

$$\leqslant L \| y - z \| \int_{\xi}^{x} e^{\alpha t}\, dt < L \| y - z \| \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

إذن :

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| e^{-\alpha x} < \frac{L}{\alpha} \| y - z \|$$

وبالتالي :

$$\| Ty - Tz \| < \frac{L}{\alpha} \| y - z \|$$

فإذا اخترنا مثلاً $\alpha = 2L$ فإننا نجد أن T يحقق شرط ليبشتز بثابتة $k = \frac{1}{2}$.

إن هذا الاثبات يعطينا الوجود في خطوة واحدة للفترة بأكملها .

(٢ ـ ٢) ملاحظات : (آ) تشير المبرهنة الأخيرة إلى أنه انطلاقاً من دالة $y_0(x)$ مستمرة في J ، يمكن الوصول إلى متتالية التقريبات المتتالية :

$$y_{k+1}(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y_k(t))\, dt \quad (k = 0,1,2,\dots) \qquad (6)$$

إن هذه المتتالية من التقريبات متقاربة نظيمياً ، وبالتالي بانتظام ، في J نحو حل $y(x)$ لمسألة القيم الإبتدائية . ويمكن للمرء أن يستخدم هذا الاسلوب التكراري لتعيين عددي تقريبي لحل المسألة . ومن الطبيعي أن ينطلق من دالة $y_0(x)$ تكون أكثر ملاءمة للحل بقدر الامكان . ولكن إذا لم يكن متوفراً لدينا أية معلومات عن شكل الحل فمن الممكن اختيار $y_0(x) = \eta$.

(ب) يمكن صياغة مبرهنة وجود ووحدانية لمسألة قيم ابتدائية تصح في فترة

على يسار القيمة الابتدائية $J_- : \xi - a \leqslant x \leqslant \xi \; (a > 0)$ ، وذلك على النحو التالي :

إذا كانت f مستمرة في الشريط $s_- = J_- \times \mathbb{R}$ وتحقق هناك شرط ليبشتز (2) فعندئذ يكون لمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = f(x, y) \quad \text{لأجل} \quad \xi - a \leqslant x \leqslant \xi$$

$$(1_-) \qquad y(\xi) = \eta$$

حل وحيد في J_- .

ولاثبات هذه المبرهنة نضع :

$$\bar{f}(x,y) = -f(2\xi - x, y) \qquad \bar{y}(x) = y(2\xi - x)$$

أي اننا ، بلغة الهندسة ، نجري تناظراً في المستقيم $x = \xi$. وبذلك تتحول المسألة المطروحة إلى مسألة القيم الابتدائية :

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \quad \text{لأجل} \quad \xi \leqslant x \leqslant \xi + a$$

$$(1^*) \qquad \bar{y}(\xi) = \eta$$

ومن الواضح أن $\bar{f}$ يحقق شروط المبرهنة (٢ - ١) . وكذلك يرى المرء بسهولة اننا نعرف وفق التطبيق $\varphi(x) \to \bar{\varphi}(x) = \varphi(2\xi - x)$ تقابلاً بين $C(J_-)$ و $C(J)$ ينقل حلول (1_-) إلى حلول (1^*) (وبالعكس) وبذلك نصل ، اعتماداً على المبرهنة (٢ - ١) ، الى المطلوب .

ونود ان نلفت النظر إلى أنه كان بالامكان اعادة البرهان الذي قمنا به في المبرهنة على الحالة التي نحن بصددها مستخدمين النظيم :

$$\|y\| = \max |y(x)| \, e^{+\alpha x}$$

سننتقل الآن إلى مبرهنة ثانية نعالج فيها الحالة التي لاتكون فيها f معرفة على شريط كامل بل في جوار نقطة (ξ,η) الأمر الذي نصادفه كثيراً .

(٢ — ٣) مبرهنة : ليكن $R : \xi \leqslant x \leqslant \xi + a ,\ |y - \eta| \leqslant b \ (a,b > 0)$ مستطيلاً ولنفرض أن $f \in C(R)$ يحقق في R شرط ليبشتز (2) . عندئذ يوجد حل وحيد لمسألة القيم الابتدائية (1) يصح ، على الأقل ، في فترة $\xi \leqslant x \leqslant \xi + \alpha$ بفرض أن :

$$\alpha = \min (a , \frac{b}{A}) \quad A = \max_{R} | f |$$

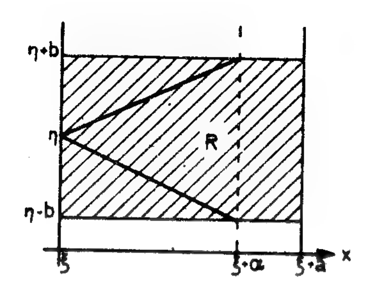
كذلك يصح الأمر نفسه في حالة مستطيل يقع على يسار الموضع $(\xi\ \eta)$.

لاثبات المبرهنة نعرف ممدوداً لـ f على النحو :

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,\eta-b) & (\text{لأجل } y<\eta - b) \\ f(x,y) & (\text{في } R) \\ f(x,\eta+b) & (\text{لأجل } y >\eta + b) \end{cases}$$

إن $\bar{f}$ معرف على الشريط $\xi \leqslant x \leqslant \xi + a ,\ -\infty < y < \infty$ وهو مستمر هناك ويحقق شرط ليبشتز (2) بثابتة ليبشتز لاتختلف عن ثابتة ليبشتز لـ f . وإستناداً إلى المبرهنة (٢ - ١) يوجد حل وحيد $y(x)$ لمسألة القيم الابتدائية المتعلقة بـ $\bar{f}$. ان جزء هذا الحل الواقع في المستطيل R هو حل لمسألة القيم الابتدائية الأصلية ولما كان $|\bar{f}| \leqslant A$ فإن $|y'| \leqslant A$ وهذا يعني أن الحل يقع في الزاوية المحصورة بين المستقيمين المنطلقين من النقطة (ξ,η) وبميلين $\pm A$ (انظر الشكل) وهذا يعني ان هذين المستقيمين يغادران R في الموضع $\xi+\alpha$ بفرض أن α أصغر العددين a و b/A .

كذلك من الممكن هنا أيضاً اجراء البرهان الذي قمنا به في المبرهنة (٢-١)



مباشرة . وعندئذ لانحتاج إلى تمديد f . ولكن علينا في هذه الحـالة أن ننظر في المؤثر T (كما عرفناه في (٢ - ١)) على فضاء باناخ B للدوال المستمرة في [$\xi, \xi+\alpha$] ، وبشكل أدق على تلك المجموعة الجزئية D المكونة من الدوال φ المنتمية إلى B والتي يقع بيانها في R ، أي $|\varphi(x)-\eta| < b$ وعلى المرء كي يتمكن من استخدام مبرهنة النقطة الثابتة أن يثبت أن D مغلقة وانهـا تنتقل بـ T إلى D نفسها ونترك اثبات ذلك للقارىء .

(٢ ـ ٤) **شرط ليبشتز الموضعي (آ) تعريف** · نقول عن دالـة $f(x,y)$ انها تحقق في جزء D من $\mathbb{R}^2$ شرط ليبشتز الموضعي فيما يخص y ، اذا وجـد لكل موضع (x_0, y_0) من D جوار $U = U(x_0, y_0)$ وثابت $L = L(x_0, y_0)$ بحيث تحقق f شرط ليبشتز :

$$|f(x,y)-f(x,\overline{y})| \leqslant L\,|y-\overline{y}| \qquad (2)$$

في $D \cap U$.

(ب) رائز : إذا كانت D مفتوحة وكان لـ f ($(f \in C(D))$) مشتق مستمر f_y فعندئذ يحقق f شرط ليبشتز الموضعي في D .

ولاثبات ذلك نلاحظ أنه إذا كان U جواراً دائرياً للعنصر (x_0,y_0) من D بحيث يكون $\bar{U}\subset D$ فعندئذ يكون f_y محدوداً في U أي $|f_y| \leqslant L$. واستناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى يكون :

$$f(x,y)-f(x,\bar{y}) = (y-\bar{y})\, f_y(x,y^*) \qquad y^*\in(y,\bar{y})$$

وذلك مهما كان $(x,y),(x,\bar{y})$ من U . ومن العلاقة الاخيرة نجد (2) .

ومما لاشك فيه أن شرط ليبشتز الموضعي هو ، بالمقارنة مع شرط ليبشتز الشمولي كما في المبرهنة (٢ - ١) ، شرط ضعيف . فإذا نظرنا مثلاً في الدالة المعرفة بـ $f(x,y)=y^2$ نرى أن :

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})| = |y^2-\bar{y}^2| = |y+\bar{y}|\,|y-\bar{y}|$$

فهذه الدالة تحقق في $\mathbb{R}^2$ (أو في أي شريط $J\times\mathbb{R}$). شرط ليبشتز الموضعي ، ولكنها لاتحقق شرط ليبشتز (الشمولي) .

(ج) الحل الموضعي : إذا كانت D مفتوحة وإذا حققت الدالة f من $C(D)$ شرط ليبشتز الموضعي ، فعندئذ تكون مسألة القيم الابتدائية (1) ذات حل وحيد موضعي لأجل (ξ,η) من D . أي انه يوجد حل وحيد في جوار لـ ξ .

ان هذه القضية تنتج مباشرة من المبرهنة (٢ - ٣) . وما علينا سوى أن ننشيء مستطيلاً على يمين الموضع (ξ,η) من النمط الوارد في (٢ - ٣) . وفي هذا المستطيل ، الذي نختاره صغيراً بقدر كاف ، يتحقق شرط ليبشتز ويمكن بالتالي تطبيق المبرهنة (٢ - ٣) . وإذا أنشأنا المستطيل على اليسار فإننا نسلك سبيلاً مماثلاً .

وهدفنا التالي هو الحصول على معلومات شمولية أوسع مدى حول تمديد هذا الحل .

(٢ ـ ٥) **تمهيدية :** لتكن f دالة معرفة في D ،ولتكن $(A \neq \varnothing)$ $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ مجموعة من حلول مسألة القيم الابتدائية (1) (بفرض أن φ_α هو حل في الفترة J_α) تتمتع بالخاصة التالية :

$$(*) \qquad \varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x) \quad \text{لأجل} \quad x \in J_\alpha \cap J_\beta$$

وذلك مهما كان α و β من A . عندئذ يوجد حل وحيد φ في الفترة $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$ بحيث يكون مقصور φ على J_α هو φ_α مهما كانت α من A (ليلاحظ أن $\xi \in J_\alpha$ مهما كانت α) .

يمكن لنا الحصول على هذا الحل بان نعين لكل x من J دليلا α من A بحيث يكون $x \in J_\alpha$ ثم نضع $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$. وإذا كان β دليلا آخر بحيث يكون $x \in J_\beta$ فعندئذ يكون حسب الفرض $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x)$ ، وهذا يعني أن التعريف المذكور لالبس فيه .

وإذا كانت a نقطة كيفية من J فعندئذ يوجد دليل α من A بحيث يكون $a \in J_\alpha$. ويكون أيضاً $[\xi, a] \subset J_\alpha$ و $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$ في $[\xi, a]$ ينتج من ذلك أن φ هو في الواقع حل لـ (١) في J .

وإذا ماطبقنا هذه التمهيدية على مجموعة جميع حلول مسألة القيم الابتدائية فإن (*) لاتعني شيئاً سوى الوحدانية . وعلى هذا فإننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة : إذا كان لمسألة القيم الابتدائية (١) حل واحد على الأقل ، وإذا صحت قضية الوحدانية (*) لكل حلين ، فعندئذ يوجد حل غير قابل للتمديد لـ (1) . وإن جميع الحلول الأخرى هي مقصورات هذا الحل .

(٢ ـ ٦) **تمهيدية حول تمديد الحلول :** ليكن D جزءاً من $\mathbb{R}^2$ وليكن $f \in C(D)$.

(آ) إذا كان φ حلا للمعادلة التفاضلية $y'=f(x,y)$ في الفترة $\xi \leqslant x < b$، يجري باكمله في مجموعة متراصة A جزئية من D ، فعندئذ يمكن تمديد φ لنحصل على حل على الفترة المغلقة $[\xi,b]$.

(ب) إذا كان φ حلا في الفترة $[\xi,b]$ وكان ψ حلا في الفترة $[b,c]$ وكان $\varphi(b)=\psi(b)$ فعندئذ تكون الدالة :

$$u(x)=\begin{cases} \varphi(x) & (\text{لأجل } \xi \leqslant x < b) \\ \psi(x) & (\text{لأجل } b < x < c) \end{cases}$$

حلا في الفترة $[f,c]$.

البرهـان : (آ) أن f محدودة على A ، مثلا $|f| \leqslant c$. عندئذ يكون $|\varphi'| < c$ وبالتالي يكون φ مستمراً بانتظام في $[\xi,b]$ ، وعلى هـذا فإن هناك $\beta=\lim\limits_{x\to b-0} \varphi(x)$ ويكون $(b,\beta)\in A$. وإذا وضعنا $\varphi(b)=\beta$ ،فعندئذ يكون $\varphi(x)$ ، وبالتالي $f(x,\varphi(x))$ ، مستمراً في $[\xi,b]$. ثم ان المعادلة :

$$\varphi(x)=\varphi(\xi)+\int_{\xi}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt$$

صحيحة عندما $\xi < x < b$. وبالانتقال الى النهايات $x\to b-0$ نرى أن هذه المعادلة تصح كذلك عندما $x=b$. ينتج عن ذلك أن لـ φ مشتقاً (من اليسار) وأن $\varphi'(b)=f(b,\varphi(b))$.

(ب) يكفي أن نتحقق فيما إذا كان u محققاً للمعادلة التفاضلية في الموضع b. ولكن لـ u مشتقاً عنـد هـذا الموضع من اليسار واليمين ، وهذان المشتقان متساويان ، فهما مساويان لـ $f(b,\varphi(b))$. وبهذا نكون قد انهينا البرهان .

وفيما يلي سنقدم المبرهنة الأساسية التالية .

(٢ ـ ٧) مبرهنة الوجود والوحدانية : لنفرض أن الدالة $f \in C(D)$ تحقق في مجموعة مفتوحة D شرط ليبشتز الموضعي ، عندئذ يكون لمسألة القيم الابتدائية

$$y' = f(x,y) \qquad y(\xi) = \eta \qquad (7)$$

في كل موضع (ξ,η) من D ، حل φ غير قابل للتمديد ، ويقترب من اليمين من حدود D بالقدر الذي نريد . إن هذا الحل يتعين بشكل وحيد ، بمعنى أن جميع حلول (7) هي مقصورات لـ φ .

ملاحظـة : إن القول أن φ تقترب من اليمين نحو محيط D بالقدر الذي نريد ، يمكن أن نوضحه على النحو التالي : إذا كانت G غلاقة بيان φ ، وكانت G_+ مجموعة النقاط (x,y) من G التي تحقق $\xi \leqslant x$ فعندئذ يكون :

(آ) G_+ ليست جزءاً متراصاً من D .

وبعبارة اخرى : ان φ موجودة إلى اليمين في فترة $\xi \leqslant x < b$ (يسمح لـ $b = \infty$) وتكون هناك واحدة من الحالات التالية :

(ب) $b = \infty$ والحل موجود لأجل جميع $x \geqslant \xi$

(حـ) $b < \infty$ و $\limsup_{x \to b-0} |\varphi(x)| = \infty$ والحل يصبح لانهاية .

(د) $b < \infty$ و $\liminf_{x \to b-0} \rho(x, \varphi(x)) = 0$ بفرض أن $\rho(x_0, y_0)$ بعد النقطة (x_0,y_0) عن محيط D . إن الحل هنا يقترب من المحيط بالقدر الذي نريد .

وفي الواقع ان (آ) تنص على أنه اما أن تكون G_+ غير محدودة (الحالة (ب) أو (حـ)) ، أو تكون محدودة وتحتوي على نقط محيطية من D (الحالة (د)) .

البرهـان : الوحدانية . لنبدأ ببرهان مايلي : إذا كان φ و ψ حلين لمسألة

القيم الابتدائية وكانت J فترة وجود مشتركة لهذين الحلين بحيث يكون $\xi \in J$ ، فعندئذ يكون $\psi = \varphi$ في J .

لنفرض أن هذه القضية خاطئة وأنه توجد مثلا على يمين ξ نقطة x من J يكون عندها $\psi(x) \neq \varphi(x)$. عندئذ يوجد على يمين ξ نقطة أولى x_0 من J يبدأ عندها الحلان بالاختلاف . عندئذ يكون x_0 أيضاً العدد الأكبر الذي يتمتع بالخاصة : $\varphi(x) = \psi(x)$ لأجل $\xi < x \leqslant x_0$ ($x_0 = \xi$ ليست مستثناة) .

وإستناداً إلى مارأيناه في (٢ - ٤) (ح) فإنه يوجد حل موضعي مار بالنقطة $(x_0, \varphi(x_0))$ ، وهذا الحل وحيد . بعبارة أخرى ان $\psi(x) = \varphi(x)$ في جوار يميني من x_0 ، وهذا يتناقص مع ما افترضناه في x_0 . وبشكل مماثل يمكن اثبات الوحدانية من اليسار .

الوجود : استناداً إلى (٢ - ٤) (ح) يوجد حل موضعي لـ (7) ، واستناداً إلى ما اثبتناه قبل قليل فإن قضية الوحدانية (*) التي مرت في (٢ - ٥) صحيحة. وعندئذ استناداً إلى النتيجة (٢ - ٥) يوجد حل غير قابل للتمديد φ . وما علينا سوى أن نثبت أن هذا الحل يقترب من محيط D من اليمين بالقدر الذي نريد (يمكن اثبات الاقتراب من المحيط من اليسار بشكل مماثل) .

لنفرض أن (آ) خاطئة . عندئذ تكون G_+ جزءاً متراصاً من D ، وبالتالي يوجد φ في فترة منتهية $\xi \leqslant x < b$ أو $\xi \leqslant x \leqslant b$. وفي الحالة الأولى تكون التمهيدية (٢ - ٦) (آ) قابلة للتطبيق ، وبالتالي تكون φ قابلة للتمديد على $[\xi, b]$. وفي الحالة الثانية يكون $(b, \varphi(b)) \in D$ ويمكن لنا استناداً إلى (٢ - ٤) (ح) تعيين حل موضعي ψ يمر بهذه النقطة . واستناداً إلى (٢ - ٦) (ب) نحصل أيضاً على تمديد لـ φ .

وهكذا نكون قد وصلنا في كل من الحالتين إلى ما يناقض كون φ غير

قابل للتمديد وبهذا نكون قد اثبتنا المبرهنة كلياً .

(٢ ــ ٨) تمرين : لتكن الدالة $k(x,t,z)$ مستمرة في $-\infty < z < \infty$ ، $a \geqslant x \geqslant t \geqslant 0$ وتحقق شرط ليبشتز في z :

$$| k(x,t,z) - k(x,t,\bar{z}) | \leqslant L | z - \bar{z} |$$

ولتكن الدالة $g(x)$ مستمرة في $a > x > 0$ اثبت باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة أن لمعادلة فولترا التكاملية :

$$u(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t, u(t))\, dt$$

حلا وحيداً مستمراً في $a > x \geqslant 0$.

(٢ ــ ٩) تمرين : إذا حققت دالة $f(x,y)$ شرط ليبشتز الموضعي بخصوص y في مجموعة مفتوحة D جزئية من $\mathbb{R}^2$ ، وإذا كانت A جزءاً متراصاً من D ، وكان f محدوداً على A فإن f تحقق في A شرط ليبشتز (الشمولي) بخصوص y .

(٢ ــ ١٠) تمرين : إذا كانت f دالة مستمرة في مجموعة مفتوحة D ، وإذا كان φ حلا لمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = f(x, y) \qquad y(\xi) = \eta$$

في فترة $[\xi, b)$ ، $b < \infty$ ، وإذا فرضنا أن هذا الحل يقترب إلى اليمين من محيط D بالقدر الذي نريد ، فعندئذ تصح احدى الحالتين (وقد تصحان معاً)

(آ) $\varphi(x) \to +\infty$ أو $\varphi(x) \to -\infty$ عندما $x \to b-0$

(ب) $\rho(x, \varphi(x)) \to 0$ عندما $x \to b-0$

ارشاد : على المرء ان يبين انه إذا كان G_b تقاطع علاقة بيان φ مع المستقيم $x = b$ فإن $G_b \subset \partial D$.

(٢ــ١١) تمرين : لتكن الدالة $f(x, y)$ مستمرة في الشريط $S = J \times \mathbb{R}$ حيث يكون $J = [o, a]$ ، وتحقق الشرط :

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant \frac{k}{x} |y - z| \quad o < x \leqslant a \quad y, z \in \mathbb{R}$$

بفرض أن $k < 1$. اثبت أن لمسألة القيم الابتدائية

$$y' = f(x, y) \text{ في } J \text{ و } y(o) = \eta$$

حلا وحيداً ، وأن هذا الحل يمكن أن يحسب بطريقة التقريبات المتتالية .

ارشاد : ان المؤثر T :

$$(Tu)(x) = \int_o^x f(t, \eta + u(t))\, dt$$

يحقق في فضاء باناخ B لجميع الدوال u المستمرة على J وبنظيم منته :

$$\|u\| = \sup \{ |u(x)| / x : o < x \leqslant a \}$$

شرط ليبشتز (1, 3) . ان النقط الثابتة لـ T هي بعض النظر عن ثابتة ، حلول لمسألة القيم الابتدائية .

٣ ــ **نظرية الوجود لبيانو** : لقد اشترطنا في البند السابق أن يحقق $f(x, y)$ شرط ليبشتز كيما يكون لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد . ولكن هذا الشرط لايتحقق في معادلات تفاضلية مثل $y' = \sqrt{|y|}$ ، الأمر الذي يجعلنا نطرح السؤال التالي :

هل يكفي استمرار $f(x, y)$ لاثبات وجود حل للمعادلة التفاضلية . ان الجواب على هذا السؤال كان ايجابياً .

(٣ ـ ١) مبرهنة الوجود لبيانو : إذا كانت $f(x, y)$ مستمرة في منطقة D فعندئذ يمر بكل نقطة (ξ, η) من D حل واحد على الاقل للمعادلة التفاضلية:

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

يمكن تمديد كل حل نحو اليمين أو نحو اليسار حتى المحيط (أي أن لكل حل ممدداً يقترب إلى اليمين والى اليسار من محيط D بالقدر الذي نريد) .

قبل اثبات هذه المبرهنة نحتاج إلى بعض التعاريف والمبرهنات المساعدة .

(٣ ـ ٢) الاستمرار المتساوي : إذا كانت M مجموعة من الدوال المستمرة على الفترة $J: a \leqslant x \leqslant b$ ، نقول عن هذه المجموعة انها متساوية الاستمرار إذا استطعنا أن نجد لكل $\epsilon > 0$ عدداً $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ بحيث يكون :

(2) $|f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon$ مهما كان x و $\bar{x}$ من J شرط أن يكون $(x, \bar{x} \in J)$ ، ومهما كان f من M .

المهم في هذا التعريف أن δ هي نفسها لجميع دوال M .

مثال : إذا كانت M مجموعة جميع الدوال f التي تحقق في J شرط ليبشتز بثابتة واحدة L :

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leqslant L\,|x - \bar{x}| \qquad x, \bar{x} \in J$$

ان هذه المجموعة M متساوية الاستمرار ، إذ أننا نستطيع أن نضع $\delta(\epsilon) = \epsilon / L$.

(٣ ـ ٣) **تمهيدية** : إذا كانت المتتالية ... $f_1(x)$, $f_2(x)$ متساوية الاستمرار في $J = [a,b]$ ، وإذا تقاربت هذه المتتالية عند جميع قيم x من مجموعة A جزئية من J وكثيفة في J ، فعندئذ تتقارب المتتالية عند جميع قيم x من J بانتظام : وتكون نهايتها $f(x)$ مستمرة في J .

(نقول عن مجموعة نقط A انها كثيفة في J ، إذا حوت كل فترة جزئية من J نقطة واحدة على الاقل من A (ان مجموعة الاعداد المنطقة مثلا المنتمية إلى J كثيفة في J)) .

البرهـان : بما أن المتتالية متساوية الاستمرار فإننا، لأجل $\epsilon > 0$ ، نستطيع ايجاد $\delta = \delta(\epsilon)$ بحيث تتحقق (2) لأجل جميع الدوال f_n . لنقسم الآن الفترة J الى p فترة جزئية مغلقة $J_1, J_2, \dots, J_p$ بحيث يكون طول كل فترة أصغر من δ. وفي كل من هذه الفترات يوجد عدد x_i ينتمي إلى $J_i \cap A$. وبما أن المتتالية متقاربة ، فرضاً ، عند x_i فإننا نستطيع أن نجد $n_0 = n_0(\epsilon)$ بحيث يكون :

$$| f_m(x_i) - f_n(x_i) | < \epsilon \quad m, n \geqslant n_0 \quad i = 1, \dots, p$$

فإذا كانت x نقطة كيفية من J ، ولنفرض انها تنتمي مثلا إلى J_q فعندئذ يكون $|x - x_q| < \delta$ ويكون بالتالي استناداً إلى (2) :

$$| f_m(x) - f_n(x) | \leqslant | f_m(x) - f_m(x_q) | + | f_m(x_q) - f_n(x_q) |$$
$$+ | f_n(x_q) - f_n(x) | < 3\epsilon \quad m, n \geqslant n_0$$

وبذلك نكون قد اثبتنا ان المتتالية $f_n(x)$ متقاربة بانتظام في J .

(٣ ـ ٤) **مبرهنة اسكولي ـ ارزيلا :** إن كل متتالية من الدوال متساوية الاستمرار $f_1, f_2, \dots$ في فترة $J = [a,b]$ والمحققة للشرط $| f_n(x) | \leqslant C$ مهما كانت x من J ومهما كان $n \geqslant 1$ تحتوي على متتالية جزئية متقاربة بانتظام في J .

البرهـان : لتكن $A=\{x_1, x_2, ...\}$ مجموعة معدودة كثيفة في J (كأن تكون مثلا مجموعة جميع الأعداد المنطقة الواقعة في J) . إن المتتالية العددية $a_n = f_n(x_1)(n = 1, 2, ...)$ محدودة ، وبالتالي فإننا نجد فيها متتالية جزئية متقاربة ، مثل :

$$f_{p_1}(x_1), f_{p_2}(x_1), f_{p_3}(x_1), ...$$

وان المتتالية العددية $b_n = f_{p_n}(x_2)$ محدودة أيضاً ، وبالتالي فاننا نجد فيها متتالية جزئية متقاربة مثل :

$$f_{q_1}(x_2), f_{q_2}(x_2), f_{q_3}(x_2)...$$

ولا شك أن المتتالية $\{q_n\}$ جزئية من المتتالية $\{p_n\}$ ، وكذلك نرى أن المتتالية العددية $c_n = f_{q_n}(x_3)$ محدودة وفيها متتالية جزئية متقاربة مثل :

$$f_{r_1}(x_3), f_{r_2}(x_3), f_{r_3}(x_3)...$$

وبمتابعة هذا الاسلوب نحصل على متتالية من المتتاليات .

$f_{p_1}, f_{p_2}, f_{p_3}, ...$ متقاربة في $x = x_1$

$f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}, ...$ متقاربة في $x = x_1, x_2$

$f_{r_1}, f_{r_2}, f_{r_3}, ...$ متقاربة في $x = x_1, x_2, x_3$

وفي السطر الـ k نجد متتالية جزئية من متتالية السطر $k-1$. وتتقارب هذه المتتالية في $x = x_1, ..., x_k$. ينتج عن هذا أن المتتالية القطرية :

$$f_{p_1}, f_{q_2}, f_{r_3}, ...$$

متقاربة مهما كانت x من A ، وذلك لأنه اذا كان x_k من A فـإن هـذه

المتتالية بدءاً من الحد الـ k فيها هي متتالية جزئية من السطر الـ k . وهكذا نجد أن شروط التمهيدية (٣ ـ ٤) محققة وبالتالي فإن هذه المتتالية القطرية متقاربة بانتظام .

(٣ ـ ٥) مبرهنة : لنفرض أن الدالة $f(x,y)$ مستمرة ومحدودة في الشريط $J \times R$ بفرض أن $J = [\xi, \xi + a]$ وأن $a > 0$ ، عندئذ توجد دالة واحدة، على الأقل، $y(x)$ فضولة في J (وبالتالي فضولة باستمرار) وتحقق :

$$y' = f(x, y) \text{ في } J \text{ و } y(\xi) = \eta \qquad (3)$$

البرهــان : ان المسألة هي البحث عن دالة $y(x)$ مستمرة في J وتحقق :

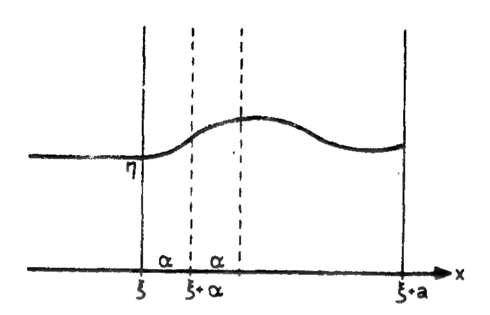
$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))\, dt \qquad (4)$$

في J . لننشىء في سبيل ذلك لكل $\alpha > 0$ حلا تقريبياً $z_\alpha(x) \in C(J)$ وفق :

$$z_\alpha(x) = \begin{cases} \eta & x < \xi \\ \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, z_\alpha(t - \alpha))\, dt & x \in J \end{cases} \qquad (5)$$

ان هذه الصيغة تعرف z_α لأجل $x \leqslant \xi + a$ ، وذلك لأنه اذا كان $\xi < x < \xi + \alpha$ فإنه يكون في التكامل الوارد في (5) $t - \alpha \leqslant \xi$ وعلى هذا فإن $z_\alpha(k - \alpha) = \eta$ والتكامل معرف تماماً . وإذا كان $\xi + \alpha \leqslant x \leqslant \xi + 2\alpha$ فإن $t - \alpha < x - \alpha \leqslant \xi + \alpha$ وبالتالي يكون $z_\alpha(t - \alpha)$ معرفاً والتكامل معرفاً تماماً وهكذا . وبهذا نحصل بعد عدد منته من الخطوات على دالة $z_\alpha(x)$ مستمرة

$x \leqslant \xi + a$ ومحققة للمعادلة (5) . إن المجموعة M المكونة من هـذه الدوال $z_\alpha(x)$ المستمرة في J متساوية الاستمرار هناك . ذلك لأنه انطلاقاً من $|f| \leqslant c$



الحلول التقريبية $z_\alpha(x)$

نري أن $|z'_\alpha(x)| \leqslant c$ ، وهذا يعني أن z_α تحقق شرط ليبشتز :

$$|z_\alpha(x) - z_\alpha(\bar{x})| \leqslant c|x - \bar{x}|$$

وعلى هذا فإن في المتتالية $z_1(x), z_{1/2}(x), z_{1/3}(x), \ldots$ ، استناداً إلى مبرهنة اسكولي - ارزيلا ، متتالية جزئية $z_{\alpha_n}(x)$ $(n = 1,2,3,\ldots, \alpha_n \to 0)$ متقاربة بانتظام. سنرمز للاختصار فيما يلي بـ $z_n(x)$ بدلاً من $z_{\alpha_n}(x)$ ويكون استناداً إلى (5) :

$$z_n(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, z_n(t - \alpha_n))\,dt \qquad (6)$$

ان نهاية هذه المتتالية ، ولتكن $y(x)$ ، مستمرة استناداً إلى المبرهنة (٣ - ٣) . وينتج من المتباينات ·

$$|z_n(t - \alpha_n) - y(t)| \leqslant |z_n(t - \alpha_n) - z_n(t)| + |z_n(t) - y(t)|$$
$$\leqslant c\,\alpha_n + |z_n(t) - y(t)|$$

أن $z_n(t-\alpha_n)$ تتقارب ، أيضاً ، بانتظام إلى $y(t)$ في J ، وبالتالي فإن $f(t, z_n(t-\alpha_n))$ تتقارب بانتظام إلى $f(t, y(t))$. وعلى هذا يكون الانتقال إلى النهايات $n\to\infty$ تحت رمز التكامل في (6) ممكناً ، الأمر الذي يعطينا المعادلة (4) وهو المطلوب .

(٣ ـ ٦) تمرين لدينا المعادلة التفاضلية $y'=f(x,y)$

فإذا كان :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3y}{x^4+y^2} & (x^2+y^2\neq 0 \text{ عندما }) \\ 0 & (x=y=0 \text{ عندما })\end{cases}$$

فاثبت أن $f(x,y)$ مستمرة في x و y ، وانها لاتحقق شرط ليبشتز في أية منطقة تحوي نقطة الأصل . اثبت بعد ذلك انها تحقق شرط مبرهنة بيانو .

٤ ـ **المعادلات التفاضلية في العقدية** : سنرمز في هـذا البند بـ z و w لأعداد عقدية و بـ $w(z)$ و $f(z,w)$ لدوال ذات قيم عقدية بمتغير عقدي واحـــد أو بمتغيرين عقديين .

نقول عن دالة عقدية $f(z,w)$ انها هولومورفية (أو منتظمة أو تحليلية) في منطقة D من الفضاء (z,w) فيما اذا كانت مستمرة هناك وكان لها مشتقان $f_z(z,w)$ و $f_w(z,w)$ مستمران في D . يبرهن في هذه الحالة صحة النشر التالي :

$$f(z,w)=\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}(z-z_0)^i(w-w_0)^j$$

في $Z=\{(z,w): \ |z-z_0|\leqslant a \quad |w-w_0|<b\}$ بفرض أن $Z\subset D$. كما يبرهن كذلـك انه اذا كانت الدوال $f(z,w)$ و $h_1(z)$ و $h_2(z)$ تحليلية (على أن نفترض في القيم $(h_1(z), h_2(z))$ أن تكون واقعة في منطقة

تعريف f) ، واذا كان $g(z)=f(h_1(z), h_2(z))$ فإن الاشتقاق التالي صحيح .

$$g'(z)= f_z(h_1(z), h_2(z))\, h_1'(z) + f_w(h_1(z), h_2(z))\, h_2'(z) \qquad (1)$$

(٤ ــ ١) مبرهنة الوجود والوحدانية في العقدية : لتكن الدالة $f(z,w)$ تحليلية في منطقة D جزئية من C^2 تحوي الاسطوانة الثنائية :

$$Z: |z-z_0| \leqslant a , \quad |w-w_0| < b$$

ولنفرض كذلك أن $|f| \leqslant M$ في Z

عندئذ يوجد حل تحليلي وحيد $w(z)$ لمسألة القيم الابتدائية :

$$w' = f(z,w(z)) \qquad w(z_0)=w_0 \qquad (2)$$

يصح في القرص الدائري :

$$K: |z-z_0| < \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

على الأقل .

البرهان : لنرمز بـ Z_1 للاسطوانة الثنائية :

$$|z-z_0| \leqslant \alpha , | w-w_0| < b$$

وليكن $|f_w| < L$ على Z_1 . عندئذ يحقق f في Z_1 شرط ليبشتز بخصوص w :

$$|f(z,w_1)-f(z,w_2)| < L\, |w_1-w_2| \qquad (3)$$

ان مسألة القيم الابتدائية (2) تكافيء المعادلة التكاملية :

$$w(z)=w_0+\int_{z_0}^{z} f(\zeta,w(\zeta))\,d\zeta \qquad (4)$$

ليكن B فضاء الدوال u التحليلية والمحدودة في K ، ولنعرف على هـــذا الفضاء النظيم :

$$\| u \| = \sup_{K} | u(z) | e^{-2L|z-z_0|}$$

ان هذا الفضاء تام ، فهو فضاء باناخ..

لتكن D_T مجموعة جميع الدوال u من B التي تحقق الشرط : $|u(z)-w_0| \leqslant b$.
ولنعرف مؤثراً T بـ :

$$Tu = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \quad u \in D_T$$

فتكون حلول مسألة القيم الابتدائية (2) هي بالضبط نقط المؤثر T الثابتة .

سنثبت الآن أن :

(آ) $\quad T(D_T) \subset D_T$

(ب) $\quad$ T يحقق في D_T شرط ليبشتز بثابتة $\frac{1}{2}$.

لاثبات (آ) نلاحظ أنه إذا كان $u \in D_T$ فإن :

$$|(Tu)(z) - w_0| = \left| \int_{z_0}^{z} f(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right| \leqslant M|z - z_0| \leqslant aM \leqslant b \qquad (5)$$

وهذا مايثبت صحة (آ) .

لاثبات (ب) نكتب :

$$| (Tu)(z) - (Tv)(z)| \leqslant \left| \int_{z_0}^{z} \{ f(\zeta,u) - f(\zeta,v) \} d\zeta \right|$$

وبما أن التكامل الوارد هنا مستقل عن طريق المكاملة فإننا نختاره القطعة المستقيمة :

$$\zeta(t) = z_0 + t e^{i\varphi} \quad , \quad \varphi = \arg(z - z_0) \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant |z - z_0|$$

فيكون :

$$| (Tu)(z) - (Tv)(z) | \leqslant L \int_{0}^{|z-z_0|} | u(\zeta(t)) - v(\zeta(t)) | \, | \zeta'(t) | \, dt$$

$$\leqslant L \int_{0}^{|z-z_0|} | u(\zeta(t)) - v(\zeta(t)) | e^{-2Lt} e^{2Lt} dt$$

$$\leqslant L \| u - v \| \int_{0}^{|z-z_0|} e^{2Lt} dt \leqslant \tfrac{1}{2} e^{2L|z-z_0|} \| u - v \|$$

إذن :

$$\| Tu - Tv \| \leqslant \tfrac{1}{2} \| u - v \| \qquad u,v \in D_T$$

وهذا مايثبت صحة (ب) . يمكننا الآن استخدام مبرهنة النقطة الثابتة فنجد أن لـ T نقطة ثابتة وحيدة w في D_T . ونحصل على هذه النقطة الثابتة على شكل متتالية (u_n) متقاربة بانتظام في K منطلقين ، مثلاً ، من $u_0(z) = w_0$ و

$$u_{n+1}(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(\zeta, u_n(\zeta)) d\zeta \quad \text{أي} \quad u_{n+1} = Tu_n \qquad (6)$$

ولاثبات وحدانية الحل الواردة في هذه المبرهنة يكفي أن نثبت أن كل حل

$w(z)$ لـ (4) يجري في Z_1 عندما $z \in K$ أي أنه يقع في D_T . إن هـذا الأمر يتضح من (5) إذا وضعنا فيها $w = u$.

(٤ ـ ٢) تعيين الحل بالنشر في متسلسلة قوى : إن الحل الوحيد $w(z)$ لمسألة القيم الابتدائية (2) يتعين كأي دالة تحليلية على شكل متسلسلة قوى :

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad |z - z_0| < \alpha \qquad (7)$$

وتكون مهمتنا هي في تعيين الأمثال a_n في هذا النشر . ويمكن أن يتم ذلك بإحدى الطريقتين التاليتين :

١ ـ الطريقة الأولى : باشتقاق المطابقة $w'(z) = f(z, w(z))$ يمكن حساب المشتقات من المراتب العليا على التالي :

$$\begin{aligned} w' &= f \\ w'' &= f_z + w' f_w \\ w''' &= f_{zz} + 2 w' f_{zw} + w'' f_w + w'^2 f_{ww} \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (8)$$

نعوض $z = z_0 , w = w_0$ فنحصل على الأمثال :

$$a_n = \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (9)$$

الطريقة الثانية : نقوم أولاً بنشر الطرف الأيمن من المعادلة :

$$f(z, w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} (z - z_0)^i (w - w_0)^j$$

فنحصل على المتطابقة :

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i (z-z_0)^{i-1} = \sum_{i,j=o}^{\infty} c_{ij}(z-z_0)^i \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right)^j \qquad (10)$$

وبمقارنة الأمثال نحصل على صيغ تدريجية لحساب a_i . إن هذه الطريقة غالباً ماتكون أكثر راحة في الحسابات العددية من سابقتها .

ومن الطبيعي أنه يمكن استخدام هـذه الطريقة في المعـــادلات التفاضلية في الحقيقية على أن تكون الأطراف اليمنى هولومورفية كذلك .

(٤ ـ ٣) مثال

$$y' = x^2 + y^2 \qquad\qquad y(o) = 1$$

لنضع :

$$y(x) = \sum_{i=o}^{\infty} a_i x^i$$

فنجد :

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = x^2 + \left(\sum_{o}^{\infty} a_i x^i \right)^2 = x^2 + \sum_{i=o}^{\infty} x^i \sum_{j=o}^{i} a_j a_{i-j}$$

أو :

$$(i+1) a_{i+1} = \sum_{j=o}^{i} a_j a_{i-j} \qquad i \neq 2$$

(11)

$$3 a_3 = \sum_{j=0}^{2} a_j a_{2-j} + 1$$

وعلى هذا فإن :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0^2 = 1$$

$$2a_1 = 2a_0 a_1 = 1$$

$$3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^2 + 1 = 4 \Rightarrow a_3 = \frac{4}{3}$$

$$4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{7}{6}$$

وبذلك نرى أن النشر يبدأ بـ :

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{7x^4}{6} + \ldots$$

ومن صيغة التدريج نستنتج أن $a_i > 0$ ، وعلى هذا فإن :

$$v(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \ldots + a_n x^n < y(x) \quad x > 0 \quad (12)$$

ومن الحدود الأولى نتوقع أنه ليس فقط $a_i > o$ بل $(i \geqslant o)$ $a_i \geqslant 1$. إن هذه المتباينة صحيحة عندما تكون i صغيرة كما هو واضح . وبالاستقراء الرياضي نستنتج بفرض $(j = 0, 1, \ldots, i)$ $a_j \geqslant 1$ أن :

$$(i+1)\, a_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} a_j\, a_{i-j} \geqslant i + 1$$

وعلى هذا فإن :

$$y(x) > 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad x > 0 \qquad (13)$$

ومن هذا نستنتج أنه لايمكن تمديد الحل نحو اليمين أبعد من الموضع $x = 1$.

(٤ - ٤) تمارين : (آ) أوجد لمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = e^x + x \cos y \qquad y(o) = 0$$

الحدود الخمسة الأولى في النشر الذي يعطي حل هذه المسألة . عين حداً أدنى موجباً a لنصف قطر تقارب هذه المتسلسلة مستفيداً ، مثلاً ، من المبرهنة(٤-٢) .

(ب) أوجد الحدود الأولى للحل $\sum a_k x^k$ لمسألة القيم ابتدائية .

$$y' = x^3 + y^3 \qquad y(o) = 1$$

ثم أوجد الحل $u = \sum b_k x^k$ لمسألة القيم الابتدائية

$$u' = u^3 \qquad u(o) = 1$$

وبرهن أن $a_k \geqslant b_k$. استنتج من ذلك حداً أعلى للعدد a ، بفرض أن ($[o, a)$ فترة الوجود الأعظمية للحل y نحو اليمين .

* * *

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية الخطية
(في العقدية)

١ ـ تحدثنا في البند الرابع من الفصل الأول عن معادلات تفاضلية يكون فيها كل من المتغير والدالة عقدياً . ولكن لماذا نعالج مثل هذه المعادلات ؟ في الحقيقة ان انماط المعادلات التفاضلية التي يمكن ايجاد حلها بعد القيام بعدد منتـه من العمليات نجريها على دوال ابتدائية ، قليلة جداً . ولذلـك فاننا غالباً ماتلجأ إلى دراسة الحلول التي يمكن التعبير عنها بعمليات غير منتهيـة ، كما نفعل مثلا في التعبير عن الحل على شكل مجموع متسلسلة غير منتهية من الدوال الابتدائية . ولقد حاولنا في (٤ ـ ٣) في الفصل السابق تعيين حل معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى على شكل متسلسلة قوى في x :

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

ولما كانت مسائل تقارب متسلسلات القوى في العقدية والتعامل مع هـذه المتسلسلات يتم في العقدية كما في الحقيقة ، فهل من المناسب توسيع مدى دراستنا للمعادلات التفاضلية والسماح للمتغير والدالة أن يكونا عقديين ، علماً بأن المعادلات التفاضلية التي نصادفها في الميكانيك أو الفيزياء هي ذات متغيرات حقيقية .

ان سبب أخذنا بهذا التوسيع للمعادلات التفاصلية هو الاستفادة من تلك العلاقة بين الدوال الأسية والمثلثية ، كما أن دراسة المعادلات في العقدية تمكننا من الاستفادة من العديد من الأفكار مثل نقط التفرع والنقط الشاذة والتمديد التحليلي والتكامل على محيط .

سنقصر اهتمامنا في هذا الفصل على المعادلات التفاضلية الخطية ، وسيكون اهتمامنا بشكل رئيسي بالمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية .

(١ ، ٢) النقط العادية والشاذة : إذا كانت لدينا المعادلة الخطية :

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

نقول عن نقطة $z = z_0$ انها نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (١) إذا كان كل من $p(z)$ و $q(z)$ تحليلياً عند تلك النقطة . ونقول عن كل نقطة غير عادية انها نقطة شاذة للمعادلة . فإذا نظرنا مثلا في المعادلة :

$$w'' + \frac{z+2}{(z-1)}\, w' + \frac{z}{(z+1)^2}\, w = 0$$

فاننا نرى ان النقطتين $z = 1$ و $z = -1$ شاذتان لهذه المعادلة ، وكل نقطة غير هاتين النقطتين من المستوي C هي نقطة عادية للمعادلة :

(١ ، ٣) الحل بجوار نقطة عادية : لنفرض فيما يلي أن $p(z)$ و $q(z)$ في المعادلة (1) تحليليان في القرص $D(z_0, R)$ ولنبين أن لمسألة القيم الابتدائية :

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0$$

(2)

$$w(z_0) = c_0 \qquad w'(z_0) = c_1$$

حلا تحليلياً وحيداً في القرص $D(z_0, R)$. لنضع ، في سبيل ذلك ، $w' = u$

فتتحول المسألة (2) إلى المسألة المكافئة :

$$
\begin{aligned}
& u' = -p(z)u - q(z)\,w \\
& w' = u \qquad\qquad\qquad\qquad (3) \\
& w(z_0) = c_0 \qquad u(z_0) = c_1
\end{aligned}
$$

ولكن بدلا من البحث في المسألة (3) نبحث في مسألة أعم وهي :

$$
\begin{aligned}
& u'_1 = a_{11}(z)u_1 + a_{12}(z)\,u_2 \\
& u'_2 = a_{21}(z)\,u_1 + a_{22}(z)\,u_2 \qquad\qquad (4) \\
& u_i(z_0) = \alpha_i \quad (i = 1,2)
\end{aligned}
$$

وذلك بفرض أن $a_{ij}(z)$ دوال تحليلية في القرص D .

والمسألة (4) تكافىء المعادلتين التكامليتين التاليتين :

$$
u_i = a_i + \int_{z_0}^{z} (a_{i1}(z)\;u_1 + a_{i2}(z)\,u_2]dz \quad (i = 1,2) \qquad (5)
$$

لنأخذ قرصاً $D'(z_0, R_1)$ ، بفرض أن $0 \leq R_1 < R$ ، فتكون a_{ij} محدودة على D' ، وبالتالي يوجد عدد موجب M بحيث يكون :

$$
|a_{ij}| < M \qquad (i, j = 1,2) \qquad (6)
$$

لتبسيط الكتابة نستخدم الرموز :

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{ij})
$$

$$
u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}
$$

نقول عن u انه تحليلي على منطقة G إذا كان كل من u_1 و u_2 تحليليا هناك ، ونقول عنه إنه محدود إذا كان كل من $|u_1|$ و $|u_2|$ محدوداً .

لنرمز بـ B لفضاء جميع المتجهات u التحليلية والمحـــدودة على 'D وإذا عرفنا على هذا الفضاء النظيم :

$$\| u \| = \sup_{\overline{D'}} | u (z) | e^{-4M | z - z_0 |}$$

وذلك بفرض أن :

$$| u (z) | = \max_i | u_i (z) |$$

فإننا نرى أن هذا الفضاء تام ، فهو فضاء باناخ .

إن المعادلة (5) تكتب الآن بالشكل :

$$u = \alpha + \int_{z_0}^{z} A u \, dz \qquad (7)$$

أو على الشكل :

$$u = T (u)$$

بفرض أن :

$$T u = \alpha + \int_{z_0}^{z} A u \, dz \qquad (8)$$

وهنا نلاحظ أنه إذا كان u تحليلياً فإن Tu تحليلي كذلك . ثم إن :

$$| T u (z) - T v(z) | \leqslant | \int_{z_0}^{z} A (u - v) (z) \, dz |$$

وبما أن التكامل الوارد هنا مستقل عن طريق المكاملة فإننا نختاره القطعة المستقيمة :

$$\zeta(t) = z_0 + t e^{i\varphi} \qquad \varphi = \arg(z - z_0) \qquad 0 < t < |z - z_0|$$

وبالتالي فإن :

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leqslant 2M \int_0^{|z-z_0|} |u(\zeta(t)) - v(\zeta(t))| \, |\zeta'(t)| \, dt$$

$$\leqslant 2M \int_0^{|z-z_0|} |u - v| e^{-4Mt} e^{4Mt} \, dt$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2} \|u - v\| e^{4M|z-z_0|}$$

إذن :

$$\|Tu - Tv\| \leqslant \tfrac{1}{2} \|u - v\|$$

يمكننا الآن استخدام مبرهنة النقطة الثابتة فنجد أن لـ T نقطة ثابتة وحيدة w . ونحصل على هذه النقطة الثابتة على شكل نهاية متتالية (u_n) متقاربة بانتظام في $\bar{D}'$ ، منطلقين مثلاً من $u_0(z) = \alpha$ و :

$$u_{n+1} = T u_n$$

وهكذا نخلص إلى المبرهنة التالية :

(١ — ٤) إذا كانت الدالتان $p(z)$ و $q(z)$ تحليليتين في القرص $D(z_0, R)$ فإن لمسألة القيم الابتدائية (1) حلاً تحليلياً وحيداً في $D(z_0, R)$.

(١ — ٥) **مثال** . إذا نظرنا إلى المعادلة :

$$w'' - z w = 0$$

فإننا نلاحظ أن $p(z) = 0$ و $q(z) = -z$ وهاتان تحليليتان في C .
وبالتالي فإن لمسألة القيمة الابتدائية :

$$w'' - z\,w = 0 \qquad w(0) = c_0 \qquad w'(0) = c_1$$

حلاً تحليلياً وحيداً في C . وعلى هذا فإنه يمكن لنا وضع الحل بالشكل :

$$w = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

لنعوض في المعادلة ونطابق بين قوى z المختلفة فنجد :

$$a_2 = 0 \qquad n(n-1)\,a_n = a_{n-3} \qquad n \geqslant 3$$

وإذا لاحظنا أن $a_0 = c_0$ و $a_1 = c_1$ فإننا نجد :

$$a_0 = c_0 \quad a_1 = c_1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{c_0}{2 . 3} \quad a_4 = \frac{c_1}{3 . 4} \quad a_5 = 0$$

$$a_6 = \frac{c_0}{2 . 3 . 5 . 6} \qquad a_7 = \frac{c_1}{3 . 4 . 6 . 7}$$

وبالتالي يكون الحل المطلوب :

$$w = c_0\left(1 + \frac{z^3}{2 . 3} + \frac{z^6}{2 . 3 . 5 . 6} + \dots\right) + c_1\left(z + \frac{z^4}{3 . 4} + \frac{z^7}{3 . 4 . 6 . 7} + \dots\right) \quad (9)$$

وإذا افترضنا c_0 و c_1 ثابتين كيفيين فإن (9) تعطي الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة .

كذلك يمكن حل المسألة بطريقة التقريبات المتتالية ، فنضع $w' = u$ لنحصل على مجموعة المعادلتين :

$$w' = u$$

$$u' = z\,w$$

وبالتالي فإن :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} \qquad \dot{\alpha} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

فإذا انطلقنا من :

$$u_0 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

فإننا نجد :

$$u_1 = T\,u_0 = \alpha + \int_0^z A\,u_0\,dz$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} + \int_0^z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \; z \\ c_0 \dfrac{z^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 z \\ c_1 + c_0 \dfrac{z^2}{2} \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$u_2 = T\,u_1 = \alpha + \int_0^z A\,u_1\,dz$$

$$= \begin{bmatrix} c_0 + c_1 z + c_0 \dfrac{z^3}{2.3} \\ c_1 + c_0 \dfrac{z^2}{2} + c_1 \dfrac{z^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = T u_2 = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 z + c_0 \frac{z^3}{2.3} + c_1 \frac{z^4}{3.4} \\ c_1 + c_0 \frac{z^2}{2} + c_1 \frac{z^3}{3} + c_0 \frac{z^5}{2.5} \end{bmatrix}$$

وهذا يعني ان الحل التقريبي الثالث لـ w هو :

$$w = c_0 \left(1 + \frac{z^3}{2.3} \right) + c_1 \left(z + \frac{z^4}{3.4} \right)$$

واذا تابعنا فإننا نجد الحل التقريبي التالي هو :

$$w = c_0 \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} \right) + c_1 \left(z + \frac{z^4}{3.4} \right)$$

(١ ــ ٦) التمديد التحليلي للحل : لقد وجدنا في البند السابق (١ ــ ٥) انه إذا كان $p(z)$ و $q(z)$ تحليليين في القرص $D(z_0, R)$ فإن لمسألة القيم الابتدائية

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0$$

$$w(z_0) = a_0 \qquad w'(z_0) = b_0$$

حلًا تحليلياً وحيداً في ذلك القرص .

لنفرض فيما يلي أن $p(z)$ و $q(z)$ تحليليان في منطقة G بسيطة الترابط وأن $z_0 \in G$ ، فعندئذ نستطيع ايجاد الحل التحليلي w_1 لمسألة القيم الابتدائية في أوسع قرص D مركزه z_0 ويقع في G .

لتكن z_1 نقطة من القرص ، وليكن :

$$w_1(z_1) = a_1 \qquad w'(z_1) = b_1$$

ولننظر في مسألة القيم الإبتدائية :

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0$$

$$w(z_1) = a_1 \qquad w'(z_1) = b_1$$

إن لهذه المسألة حلا تحليلياً وحيداً $w_2(z)$ في أوسع قرص D_1 مركزه z_1 ويقع في G . وبسبب وحدانية الحل نرى أن w_1 و w_2 متطابقان في $G \cap D_1 \neq \Phi$. واستناداً إلى مفهوم التمديد التحليلي نستطيع القول أن w_2 هو الممدد التحليلي لـ w_1 من D إلى D_1 .

نستنتج من ذلك أن الحل w_1 قابل للتمديد تحليلياً على كل منحن في G ينطلق من z_0 . واستناداً إلى مبرهنة الوحدانية في التمديد التحليلي ، فاننا نحصل بذلك على حل $w(z)$ تحليلي في G ويحقق مسألة القيم الابتدائية التي انطلقنا منها .

(١ ـ ٧) الحل العام للمعادلة التفاضلية : لقـــد وجدنا في البند (١ ـ ٦) أن للمعادلة :

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0$$

حلاً تحليلياً وحيداً w_1 في المنطقة G حيث يكون كل من $p(z)$ و $q(z)$ تحليلياً ، ويحقق هذا الحل الشروط :

$$w(z_0) = \alpha_1 \qquad w'(z_0) = \beta_1$$

وإذا استبدلنا بـ α_1 , β_1 ثابتين آخرين α_2 , β_2 فإننا نحصل على حل آخر w_2 للمعادلة المذكورة يحقق الشروط الابتدائية :

$$w(z_0) = \alpha_2 \qquad w'(z_0) = \beta_2$$

ومن الواضح أنه إذا كان $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ فإن أي حل تحليلي للمعادلة التفاضلية في G يمكن كتابته على شكل تركيب خطي من w_1 و w_2 ، أي على الشكل :

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 \qquad (10)$$

ولإثبات ذلك ، نفرض أننا نريد الحل التحليلي الذي يحقق الشروط الابتدائية

$$w(z_0) = \alpha \qquad w'(z_0) = \beta$$

نضع $z = z_0$ في (10) وفي المعادلة التي تنشأ عنها بالاشتقاق بالنسبة لـ z فنجد

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 \qquad \beta = c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2$$

ولما كان $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ فإن هاتين المعادلتين تعينان لنا قيمتي c_1 و c_2 وبالتالي نجد الحل التحليلي المطلوب .

وهكذا نرى أن (10) تعطي الحل العام التحليلي للمعادلة التفاضلية .

٢ ـ الحل في جوار نقطة شاذة منتظمة :

لنعالج حل المعادلة التفاضلية :

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

في جوار نقطة $z = z_0$ ، وذلك عندما تكون هذه النقطة نقطة شاذة لـ $p(z)$ أو لـ $q(z)$ أو لكل من $p(z)$ و $q(z)$ ، ولنطرح أولاً السؤال التالي ، ما هو الشرط الذي ينبغي أن يحققه كل من $p(z)$ و $q(z)$ كيما يكون للمعادلة (1) حلان أساسيان (غير مرتبطين خطياً) من الشكل :

$$w = (z - z_0)^{\lambda} \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \lambda \in C \qquad (2)$$

يصحان في قرص D مركزه z_0 ، ولا يحوي أية نقطة شاذة أخرى لـ $p(z)$ و $q(z)$ سوى $z = z_0$.

يمكننا لتبسيط الحسابات ودون أن نمس عمومية المسألة أن نأخـــذ $z_0 = 0$ فيأخذ الحلان (1) الشكل :

$$w_1 = z^{\lambda_1} \sum_0^{\infty} a_n z^n \qquad w_2 = z^{\lambda_2} \sum_0^{\infty} b_n z^n \qquad (3)$$

حيث يمكننا أن نفرض أن $a_0 \neq 0$ و $b_0 \neq 0$ (لو كان $a_0 = 0$ مثلا سحبنا z مرفوعة لأس مناسب إلى ماقبل اشارة الجمع بحيث يصبح الحد الأول في المتسلسلة يساوي دائماً عدداً ثابتاً غير مساو للصفر) .

للاجابة على السؤال المطروح نلاحظ أن كلا من w_1 و w_2 حل للمعادلة (1) ، لذا فإن :

$$w_1'' + p(z)\, w_1' + q(z)\, w_1 = 0$$

$$w_2'' + p(z)\, w_2' + q(z)\, w_2 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة لـ $p(z)$ و $q(z)$ نجد :

$$p = -\frac{w_1 w''_2 - w_2 w''_1}{w_1 w'_2 - w_2 w'_1} \qquad q = -\frac{w'_1 w''_2 - w'_2 w''_1}{w_1 w'_2 - w_2 w'_1} \qquad (4)$$

وإذا رمزنا بـ Δ لـ $w_1 w'_2 - w_2 w'_1$ ، فإننا نجد :

$$p = -\frac{\Delta'}{\Delta} \quad , \qquad q = -\frac{w'_1 w''_2 - w'_2 w''_1}{\Delta} \qquad (5)$$

ولكن :

$$w_1' = z^{\lambda_1 - 1} [\, a_0 \lambda_1 + a_1 (\lambda_1 + 1) z + \dots]$$

$$w'_2 = z^{\lambda_2 - 1} [\, b_0 \lambda_2 + b_1 (\lambda_2 + 1) z + \dots]$$

$$\Delta = z^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1} [\, a_0 b_0 (\lambda_2 - \lambda_1) + d_1 z + \dots]$$

$$(d_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)(a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_1 - a_1 b_0))$$

$$\Delta' = z^{\lambda_1+\lambda_2-2}[a_0 b_0 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) + d_1 (\lambda_1 + \lambda_2) z + \dots]$$

وبالتالي فإن :

$$p(z) = -\frac{1}{z} \frac{a_0 b_0(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2-1)+d_1(\lambda_1+\lambda_2) z+\dots+d_n(\lambda_1+\lambda_2+n-1) z^n+\dots}{a_0 b_0(\lambda_2-\lambda_1)+d_1 z+\dots+d_n z^n+\dots}$$

$$= \frac{1}{z} p_1(z)$$

حيث تكون $p_1(z)$ دالة تحليلية في جوار الصفر ، وإن :

$p_1(0) = -(\lambda_2+\lambda_1-1)$ عندما $\lambda_2 \neq \lambda_1$ و $p_1(0) = -(\lambda_1+\lambda_2)$ عندما $\lambda_2 = \lambda_1$

وفي كل الأحوال نرى أن $z = o$ هي قطب بسيط لـ $p(z)$ أو نقطة عادية.

ويمكن حساب $q(z)$ بالاعتماد على العلاقة الثانية من (5) أو من :

$$w_1'' + p(z) w_1' + q(z) w_1 = 0$$

ملاحظين أن :

$$w_1'' = z^{\lambda_1-2}[a_0\lambda_1 (\lambda_1-1) + a_1 (\lambda_1+1) \lambda_1 z + \dots]$$

بالتعويض نجد :

$$q(z) (a_0 + a_1 z + \dots) = \frac{1}{z^2} [-a_0\lambda_1(\lambda_1-1)-a_1(\lambda_1+1)\lambda_1 z - \dots]$$

$$- \frac{1}{z^2} p_1(z) (a_0\lambda_1 + a_1 (\lambda_1+1) z \dots)]$$

$$= \frac{1}{z^2} [- a_0 \lambda_1 (\lambda_1 - 1 + p_1 (0)) + \dots]$$

ومنه نجد :

$$q(z) = \frac{1}{z^2} q_1(z)$$

حيث تكون $q_1(z)$ دالة تحليلية في جوار الصفر ويكون :

$$q_1(0) = -\lambda_1(\lambda_1 - 1 + p_1(0))$$

وهكذا نرى أن $z = 0$ هي قطب ثنائي لـ $q(z)$ (قد تكون قطباً بسيطاً أو نقطة عادية) . والنتيجة :

يلزم كي يكون للمعادلة (1) حلان من النمط (2) هو أن تكون النقطة $z = z_0$ قطباً بسيطاً (على الأكثر) لـ $p(z)$ وقطباً ثنائياً $q(z)$ (على الأكثر)

لنطرح بعد ذلك السؤال التالي :

إذا حققت المعادلة (1) الشرط اللازم هذا ، فهل تكون حلولها من الشكل (2) . للاجابة على هذا السؤال نأخذ أيضاً $z_0 = 0$ ونكتب المعادلة (1) بالشكل:

$$z^2 w'' + z\, p_1(z) w' + q_1(z)\, w = 0 \qquad (6)$$

ولنفرض أن نشري $p_1(z)$ و $q_1(z)$ بجوار الصفر هما :

$$p_1(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \quad ; \quad q_1(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$$

قبل حل (6) نجري التحويل :

$$w(z) = z^\lambda u(z)$$

فيكون :

$$w'(z) = \lambda z^{\lambda-1} u(z) + z^\lambda u(z) ,$$

$$w''(z) = \lambda(\lambda - 1)z^{\lambda-2}u(z) + 2\lambda z^{\lambda-1}u'(z) + z^{\lambda}u''(z)$$

بالتعويض في (٥) نجد :

$$z^2u''(z) + (2\lambda + p_1)\ z\ u' + [\lambda(\lambda - 1) + \lambda\ p_1(z) + q_1(z)]u = 0$$

فإذا اخترنا λ أحد حلي المعادلة :

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda\ a_0 + b_0 = 0 \qquad (7)$$

فعندئذ يكون الحد الثابت في أمثال u معدوماً ، وبالتالي يتحول اهتمامنا إلى حل معادلة من الشكل :

$$z u''(z) + p_2(z)\ u' + q_2(z)\ u = 0 \qquad (8)$$

ولنبحث عن حل لهذه المعادلة من الشكل :

$$u = \sum_0^\infty c_n\ z^n \qquad (9)$$

بالتعويض في (8) نجد :

$$\sum_2^\infty n(n-1)\, c_n z^{n-1} + (p_0 + p_1 z + \dots) \sum_1^\infty n c_n z^{n-1} + (q_0 + q_1 z + \dots) \sum_0^\infty c_n z^n = 0 \qquad (10)$$

وذلك بفرض أن :

$$p_2(z) = \sum_0^\infty p_n z^n \quad q_2(z) = \sum_0^\infty q_n\ z^n \quad |z| < R$$

$$(p_0 = 2\lambda + a_0)$$

ومن المطابقة (10) نجد أن :

$$p_0\, c_1 + q_0\, c_0 = 0$$

وبفرض $p_0 \neq 0$ يكون :

$$c_1 = -\frac{q_0}{p_0} c_0$$

$$n(n+1)c_{n+1} + (n+1)c_{n+1}p_0 + n c_n p_1 + \dots + c_1 p_n$$
$$+ q_0 c_n + q_1 c_{n-1} + \dots + q_n c_0 = 0 \qquad n \geq 1$$

أو :

$$(n+1)(n+p_0)c_{n+1} + (n p_1 + q_0)c_n + \dots + (p_n + q_{n-1})c_1 + q_n c_0 = 0$$

$$c_{n+1} = -\frac{\sum_{j=0}^{n}[p_{j+1}(n-j) + q_j]c_{n-j}}{(n+1)(n+p_0)} \qquad (n + p_0 \neq 0)$$

وهنا نلاحظ أن :

$$|c_{n+1}| \leq \frac{\sum_{0}^{n}|p_{j+1}(n-j) + q_j|\,|c_{n-j}|}{(n+1)|n+p_0|}$$

واستناداً إلى صيغة كوشي نجد بسهولة أن :

$$|p_j| < \frac{M_1}{R_1^j} \qquad |q_j| \leq \frac{M_2}{R_1^j} \qquad (R_1 < R) \qquad j \geq 0$$

وإذا فرضنا أن $M = \max(M_1, M_2)$ ، فإن :

$$|c_{n+1}| < \frac{M}{(n+1)|n+p_0|}\sum_{0}^{n}|(n-j)\frac{1}{R_1^{j+1}} + \frac{1}{R_1^j}|\,|c_{n-j}|$$

$$= \frac{M}{(n+1)|n+p_0|}\left[(n+R_1)\frac{|c_n|}{R_1} + \frac{(n-1)+R_1}{R_1^2}|c_{n-1}|\right.$$
$$\left. + \dots + \frac{(1+R_1)}{R_1^n}|c_1| + \frac{|c_0|}{R_1^n}\right]$$

فإذا اخترنا n كبيرة بقدر كاف (مثلا $n \geq N$) بحيث يكون :

$$\frac{n+R_1}{(n+1)(n+p_0)} < 1 \; .$$

فعندئذ يكون :

$$|c_{n+1}| \leqslant \frac{M}{R_1}|c_n| + \frac{M}{R_1^2}|c_{n-1}| + \dots + \frac{M}{R_1^n}|c_1| + \frac{M}{R_1^{n+1}}|c_0| \qquad n \geqslant N$$

نختار الآن عدداً $p \geqslant M+1$ بحيث يكون :

$$|c_k| \leqslant \left(\frac{P}{R_1}\right)^k \qquad k = 0,1,\dots,N$$

فعندئذ يكون :

$$|c_{N+1}| \leqslant \frac{M}{R_1^{N+1}}\left[P^N + P^{N-1} + \dots + 1\right]$$

$$= \frac{M}{R_1^{N+1}} \; \frac{P^{N+1}-1}{P-1} = \frac{M}{R_1^{N+1}} \, P^N \, \frac{1-P^{\frac{1}{N+1}}}{1-\frac{1}{P}}$$

$$\leqslant \frac{M}{P-1}\left(\frac{P}{R_1}\right)^{N+1} < \left(\frac{P}{R_1}\right)^{N+1}$$

وبطريقة الاستقراء الرياضي نستطيع أن نجد :

$$|c_k| \leqslant \left(\frac{P}{R_1}\right)^k \qquad k = 0,1,2,\dots$$

وهكذا فإن المتسلسلة (9) متقاربة في القرص $|z| < \frac{R_1}{P}$

ويمكن بالتمديد التحليلي الحصول على حـل تحليلي للمعادلة (8) في كامل المنطقة حيث يكون $p_2(z)$ و $q_2(z)$ ، وبالتالي $p_1(z)$ و $q_1(z)$ ، تحليليين :

وهكذا نجد أن المعادلة (6) حلا من الشكل :

$$w_1(z) = z^{\lambda} \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \qquad (11)$$

والسؤال الآن هو أنه إذا كان المعادلة (6) حل من الشكل (11) ، فما هو شكل الحل العام للمعادلة (6) . لذلك نجري التحويل .

$$w = w_1 v$$

وبالتعويض في (6) نجد :

$$z^2 w_1 v'' + (2 w_1' z + p(z) w_1) z v' = 0$$

ومنه :

$$\frac{dv'}{v'} = -\frac{2 w_1' z + p(z) w_1}{z w_1} dz$$

$$v' = e^{-\int \frac{2w_1'}{w_1} dz} \quad e^{-\int \frac{p(z)}{z} dz}$$

$$v' = \frac{A}{w_1^2} e^{-\int \frac{p(z)}{z} dz} = \frac{1}{w_1^2} e^{-\int \frac{a_0 + a_1 z + \dots}{z} dz}$$

$$= \frac{A}{w_1^2} z^{-a_0} e^{-a_1 z - \frac{a_2}{2} z^2 \dots}$$

$$= \frac{A}{w_1^2} z^{-a_0} \sum_{0}^{\infty} c'_n z^n \qquad (A \text{ ثابت مكاملة})$$

وإذا رمزنا لجذري المعادلة (7) بـ λ_1 و λ_2 فيكون $a_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ ، وإذا

كانت λ في (11) هي λ_1 فيكون :

$$v' = A \frac{z^{-2\lambda_1} z^{\lambda_1+\lambda_2+1}}{(\sum_0^\infty c_n z^n)^2} \sum_0^\infty c'_n z^n$$

$$= A z^{\lambda_2-\lambda_1-1} \sum_0^\infty c''_n z^n$$

وبفرض أن $\lambda_2 \neq \lambda_1$ وأن $\lambda_1 - \lambda_2$ ليس عدداً صحيحاً سالباً نجد بالمكاملة

$$v = A z^{\lambda_2-\lambda_1} \sum_0^\infty c'''_n z^n + B$$ (B ثابت مكاملة)

وعلى هذا يكون الحل العام لـ (6) هو :

$$w = B w_1 + A z^{\lambda_2} \sum_0^\infty d_n z^n$$

$$w = B z^{\lambda_1} \sum_0^\infty c_n z^n + A z^{\lambda_2} \sum_0^\infty d_n z^n \qquad (12)$$

اما اذا كان $\lambda_2 = \lambda_1$ ، أي إذا كان للمعادلة (7) جذر مضاعف ، فإنه يكون عندئذ :

$$v = A' \lg z + \sum_0^\infty c'''_n z^n + B$$

يكون الحل العام لـ (6) هو :

$$w = A' w_1 \lg z + z^{\lambda_1} \sum_0^\infty d_n z^n \qquad (13)$$

وفي الحالة التي يكون فيها $\lambda_1 - \lambda_2$ عدداً صحيحاً سالباً فعندئذ يكون لدينا :

$$v = A' \lg z + \sum_{0}^{\infty} c'''_n z^n + B$$

أو يكون ،

$$v = \sum_{0}^{\infty} c'''_n z^n + B$$

ويكون عندئذ .

$$w = A' w_1 \lg z + z^{\lambda_1} \sum_{0}^{\infty} d_n z^n$$

أو يكون .

$$w = z^{\lambda_1} \left[\sum_{0}^{\infty} d_n z^n + B \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \right] \qquad (14)$$

ملاحظة (١) لقد اشترطنا عند البحث عن حل للمعادلة (6) من الشكل (11) أن يكون $P_0 \neq -n$ ، ولكن $p_0 = 2\lambda + a_0$ أي .

$$p_0 = 2\lambda + 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

ويصبح الشرط هو :

$$2\lambda + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \neq -n$$

وبما أننا اخترنا λ أحد جذري المعادلة (7) ، وليكن λ_1 ، فإن الشرط الأخير يأخذ الشكل :

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq -n - 1 \qquad (n = 0,1,2 \ldots)$$

أي أنه ينبغي أن لايكون $\lambda_1 - \lambda_2$ مساوياً لعدد صحيح سالب . ولذلك إذا كان $\lambda_1 - \lambda_2$ عدداً صحيحاً سالباً فإننا نختار ، ونحن نبحث عن حل من الشكل (11) ، $\lambda = \lambda_2$. في هذه الحالة يأخذ الشرط السابق الشكل :

$$\lambda_2 - \lambda_1 \neq - n - 1$$

وهذا شرط محقق لأن $\lambda_2 - \lambda_1$ عدد صحيح موجب .

تعريف : نقول عن النقطة $z = z_0$ انها نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1) إذا كان $z = z_0$ قطب بسيط (على الأكثر) لـ $p(z)$ وقطب ثنائي (على الاكثر) لـ $q(z)$.

ونستنتج من الدراسة السابقة أنه يلزم ويكفي كي يكون للمعادلة (1) حل من الشكل ·

$$(z - z_0)^{\lambda} \sum_{0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (15)$$

هو أن يكون الموضع $z = z_0$ نقطة شاذة منتظمة المعادلة (1) .

وتكون λ عندئذ جذراً للمعادلة (7) التي نسميها المعادلة الدليلية . وينبغي ، في الحالة التي يكون فيها الفرق بين جذري المعادلة الدليلية عدداً صحيحاً ، أن تكون λ هي ذلك الجذر الذي اذا طرحنا منه الجذر الآخر كان الناتج عدداً صحيحاً موجباً .

ويكون الحل الأساسي الثاني للمعادلة (1) هو من الشكل (15) أيضاً ، شرط أن لايكون للمعادلة (7) جذر مضاعف أو يكون الفرق بين الجذرين عدداً صحيحا وتكون λ لهذا الحل الثاني هو الجذر الثاني للمعادلة (7) .

وإذا كان للمعادلة (7) جذر مضاعف فعندئذ يكون الحل الثاني من الشكل :

$$w = A' w_1 \lg(z - z_0) + (z - z_0)^{\lambda_1} \sum_{0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \qquad (16)$$

وفي الحالة الأخيرة إذا كان الفرق بين الجذرين عدداً صحيحاً فإن الحل الثاني يكون من الشكل (16) ، وقد يكون من الشكل (15) .

(٢ – ١) تمرين (١) أوجد الحل العام للمعادلة :

$$z^2 (1+z) w'' - z(1+2z) w' + (1+2z) w = 0 \qquad (17)$$

في جوار $z = 0$

الحـل : نلاحظ ، بتقسيم طرفي المعادلة على $z^2 (1+z)$ ، أن $z = 0$ هو قطب بسيط لأمثال w' وقطب ثنائي لأمثال w ، أي أن $z = 0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة المفروضة . وعلى هذا فإن للمعادلة المفروضة حلا من الشكل :

$$w = z^{\lambda} \sum c_n z^n \qquad (18)$$

بالتعويض في (17) نجد :

$$(1+z) \sum_0^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n z^n -$$

$$-(1+2z) \sum_0^{\infty} (\lambda+n) c_n z^n + (1+2z) \sum_0^{\infty} c_n z^n = 0$$

وبالمطابقة نجد :

$$\lambda(\lambda-1) c_1 - \lambda c_0 + c_0 = 0$$

(19)

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1) c_n + (\lambda+n-1)(\lambda+n-2) c_{n-1} - (\lambda+n) c_n$$

$$-2(\lambda+n-1) c_{n-1} + c_n + 2 c_{n-1} = 0 \qquad n \geqslant 1$$

ومن المعادلة الأولى نجد المعادلة الدليلية :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

ولهذه المعادلة جذر مضاعف $\lambda = 1$. بتعويض هذه القيمة في المعادلــة الثانية من (19) نجد :

$$n^2 c_n + (n-2)(n-1) c_{n-1} = 0$$

وإذا وضعنا $n = 1$ نجد $c_1 = 0$ ، وعلى هذا يكون $c_2 = c_3 = \ldots = 0$

والحل الأول المعادلة (17) هو :

$$w_1 = z$$

ولايجاد الحل الثاني نضع

$$w = z\,u$$

ونعوض في (17) فنجد :

$$z(1+z)u'' + u' = 0$$

وبالتالي :

$$u' = A\frac{1+z}{z}$$

$$u = A \lg z + Az + B$$

والحل العام للمعادلة هو :

$$w = Bz + Az \lg z + Az^2$$

وهذا الحل من الشكل (13) .

(٢ ــ ٢) تمرين (٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار $z = 0$.

$$(2z + 4z^3)\,w'' - w' - 24z\,w = 0$$

بسهولة نلاحظ أن $z = 0$ نقطة شاذة منتظمة ، ولذلك فللمعادلــة حل من الشكل :

$$w = z^{\lambda} \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$(2 + 4z^2) \sum_{0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^n -$$

$$- \sum_{0}^{\infty} c_n (\lambda+n) z^n - 24 \sum_{0}^{\infty} c_n z^{n+2} = 0$$

وبالمطابقة نجد :

$$2\lambda(\lambda-1) c_0 - \lambda c_0 = 0$$

$$2(\lambda+1)(\lambda) c_1 - c_1 (\lambda+1) = 0$$

$$2(n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n + 4(n+\lambda-2)(n+\lambda-3) c_{n-2}$$

$$- c_n (\lambda+n) - 24 c_{n-2} = 0$$

فالمعادلة الدليلية هي :

$$2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

وجذرا هذه المعادلة هما :

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{3}{2}$$

ولأجل $\lambda = 0$ نجد $c_1 = 0$ ونجد :

$$2n(n-1) c_n + 4(n-2)(n-3) c_{n-2} - n c_n - 24 c_{n-2} = 0$$

$$(2n^2 - 3n) c_n + 4(n^2 - 5n) c_{n-2} = 0$$

أو :

$$c_n = - \frac{4(n-5)}{2n-3} c_{n-2}$$

وهكذا نجد :

$$0 = c_1 = c_3 = c_5 = \dots \qquad c_2 = 12\, c_0 \,.. \qquad c_4 = \frac{4}{5} c_2 = \frac{48}{5} c_0 ,\dots$$

$$c_{2n} = (-1)^n\, 3\, (4)^n \frac{1 \,.\, 3 \dots (2n-5)}{1 \,.\, 5 \,.\, 9 \dots (4n-3)} \; c_0$$

والحل الأول هو :

$$W_1 = c_0 \left(1 + 12\, z^2 + \frac{48}{5} z^4 - \frac{192}{45} z^6 \dots \right)$$

ولأجل $\lambda = \frac{3}{2}$ نجد $c_1 = 0$ ونجد

$$n\,(2n+3)\,c_n + (2n-7)(2n+3)\,c_{n-2} = 0$$

أو :

$$c_n = -\frac{2n-7}{n}\; c_{n-2}$$

وهكذا نجد :

$$0 = c_1 = c_3 = c_5 = \dots \qquad c_2 = \frac{3}{2}\, c_0 \qquad c_4 = -\frac{3}{8}\, c_0$$

$$c_{2n} = (-1)^{n+1}\, 3\, \frac{1 \,.\, 5 \,.\, 9 \,..\, (4n-7)}{2 \,.\, 4 \dots 2n} \; c_0$$

والحل الثاني هو :

$$W_2 = c_0 z^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2} z^2 - \frac{1.3}{1.4} z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} z^6 - \dots \right)$$

والحل العام هو :

$$w = A w_1 + B w_2$$

(٢ ــ ٣) تمرين (٣) : أوجد الحل العام في جوار $z = 1$ للمعادلة :

$$z^2 (1 - z)^2 w'' + z(1-z)(1 - 2z) w' - w = 0$$

الحل : نجري التحويل $z - 1 = t$ ونلاحظ أن :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d^2w}{dt^2}$$

فتأخذ المعادلة التفاضلية الشكل :

$$t^2 (t+1)^2 \frac{d^2w}{dt^2} + t(t+1)(2t+1) \frac{dw}{dt} - w = 0$$

إن النقطة $t = 0$ نقطة شاذة منتظمة لهذه المعادلة ، ولذلك فللمعـــادلة حل من الشكل :

$$w = t^{\lambda} \sum_{0}^{\infty} c_n t^n$$

بالتعويض نجد :

$$(t+1)^2 \sum_{0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n t^n +$$

$$+ (2t^2 + 3t + 1) \sum_{0}^{\infty} (\lambda + n) c_n t^n - \sum_{0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

وبالمطابقة نجد :

$$[\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1] c_0 = 0$$

$$(\lambda+1)\lambda c_1 + 2\lambda(\lambda - 1) c_0 + (\lambda + 1) c_1 + 3\lambda c_0 - c_1 = 0$$

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n + 2(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)c_{n-1} + (\lambda+n-2)(\lambda+n-3) c_{n-2}$$

$$+(\lambda+n)c_n+3(\lambda+n-1)c_{n-1}+2(\lambda+n-2)c_{n-2}-c_n=0 \qquad (n\geq 2)$$

والمعادلة الدليلية هي :

$$(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

ولها جذران هما $\lambda_1=1$ و $\lambda_2=-1$. إن الجذر الأول يعطينا حلا من الشكل المفروض ، في حين قد يخفق الجذر الثاني . ولكن إذا لم يخفق الجذر الثاني فعندئذ يعطينا الحل العام دفعة واحدة . وعلى هذا فاننا نجرب أولاً $\lambda=-1$ فنجد بالتعويض في المعادلات الأخيرة .

$$c_0-c_1=0$$

$$n(n-2)c_n+(n-2)(2n-3)c_{n-1}+(n-2)(n-3)c_{n-2}=0 \qquad n\geqslant 2$$

فإذا وضعنا في الأخيرة $n=2$ نجد :

$$0c_2+0c_1+0c_0=0$$

وهذا يعني أن c_2 اختيارية ، وبذلك يكون لدينا ثابتان اختياريان هما c_0 و c_2
وإذا وضعنا $n=3$ نحصل على :

$$c_3=-c_2$$

ونجد كذلك :

$$c_4=c_2 \quad , \quad c_5=-c_2 \quad , \quad c_6=c_2 , \ldots$$

والحل العام هو :

$$w=t^{-1}[c_0+c_0t+c_2t^2-c_2t^3+c_2t^4-c_2t^5+\ldots]$$

$$=c_0\frac{1+t}{t}+c_2t(1-t+t^2-t^3+\ldots)$$

$$-c_0 \frac{1+t}{t} + c_2 \frac{t}{1+t} = c_0 \frac{z}{z-1} + c_2 \frac{z-1}{z}$$

(٢ ـ ٤) تمارين للحل

١ ـ اثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0$$

في جوار الصفر هو :

$$w = z^{-\frac{1}{2}} (c_0 \cos z + c_1 \sin z)$$

إذا كان $\nu = \frac{1}{2}$ ، وهو :

$$w = c_0 \left(1 - \frac{z^2}{2^2} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \dots \right)$$

$$+ c_1 \Big[\Big(1 - \frac{z^2}{2^2} + \dots +$$

$$+ (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \dots \Big) \lg z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \Big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Big) \Big]$$

إذا كان $\nu = 0$ ، وهو تركيب خطي من :

$$w_1 = z \left\{ 2 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{4^2.6} - \frac{z^6}{4^2.6^2.8} + \dots \right\}$$

$$w_2 = -\frac{1}{4} w_1 \lg z + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^4}{2^2.4} \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{z^6}{2^2.4^2.6} \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right) + \dots \right\}$$

إذا كان $\nu = 1$.

٢ ـ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$z w'' + w' - 4 z w = 0$$

بجوار الصفر .

الجواب :

$$w_1 = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}$$

$$w_2 = w_1 \lg z - \{ z^2 + \frac{z^4}{(2!)^2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{z^6}{(3!)^2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + .. \}$$

٣ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$2 (2 - z) z^2 w'' - (4 - z) z w' + (3 - z) w = 0$$

في جوار الصفر .

الجواب :

$$w_1 = \sqrt{z} \qquad w_2 = \sqrt{z} \sqrt{1 - \frac{1}{2} z}$$

٤ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$z^2 (1 + z)^2 w'' + z (1 - z^2) w' + (1 + z + 2 z^2) w = 0$$

الجواب :

$$w = (1 + z) (A \cos \lg z + B \sin \lg z)$$

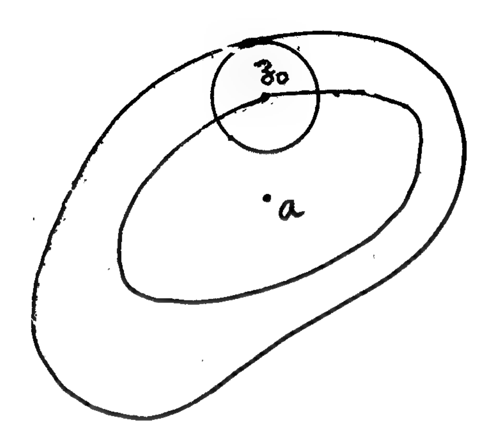
(٢ - ٥) الحل في جوار نقطة شاذة :

لنفرض أن $z = a$ نقطة شاذة (منتظمة أو غير منتظمة) للمعادلة التفاضلية :

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0$$

إن هذه النقطة الشاذة نقطة منعزلة ، وعلى هذا فهناك جوار لها لايحوي أية

نقطة شاذة سواها . لتكن z_0 نقطة في هذا الجوار . إن هذه النقطة عادية للمعادلة



وبالتالي يمكن إيجاد حلين w_2 و w_1 للمعادلة مستقلين خطياً ونستطيع بالتالي تشكيل حل عام . ان هذين الحلين يصحان في جوار ل z_0 لايحوي النقطة a . بتمديد هذين الحلين في الاتجاه الموجب على طريق يحيط بالنقطة a ويعيدنا من جديد إلى z_0 ، فنحصل من جديد على حلين عند النقطة z_0 . ليكن w_1^* الحل الذي ينشأ عن w_1 بالتمديد التحليلي و w_2^* الحل الذي ينشأ عن w_2 . ومن الواضح أن الحل w_1^* لايطابق ، بوجه عام ، الحل w_1 . وكذلك الأمر فيما يتعلق ب w_2^* و w_2 .

لنبحث الآن فيما إذا كان الحلان w_1^* و w_2^* مستقلين خطياً ، وبالتالي يشكلان مجموعة أساسة من الحلول للمعادلة التفاضلية المفروضة .

لقد وجدنا في (2,5) أنه إذا كان w_1 و w_2 حلين فإن :

$$p(z) = -\frac{\Delta'}{\Delta}$$

بفرض أن :

$$\Delta = w_1 w'_2 - w_2 w_1' = \frac{1}{w_1^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)$$

وعلى هذا فإن :

$$\Delta = c\, e^{-\int_{z_0}^{z} p(z)\, dz}$$

وبالتالي فإن :

$$w_1^2 e^{-\int_{z_0}^{z} p(z)\, dz} \frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right) = c$$

وبما أن الطرف الأيمن ثابت فهو يبقى كما هو لدى التمديد التحليلي . فإذا كان w_1 وw_2 مرتبطين خطياً فإن النسبة بينهما ثابتة وبالتالي يكون $c = 0$. وعلى هذا سيكون بعد التمديد التحليلي $\frac{d}{dz} \left(\frac{w_2^*}{w_1^*} \right) = 0$ ، والحلان الجديدان مرتبطان خطياً . أما إذا كان الحلان مستقلين خطياً فإن $c \neq 0$ وبالتالي يكون $\frac{d}{dz} \left(\frac{w_2^*}{w_1^*} \right) \neq 0$ ، ومنه النتيجة التالية :

ان التمديد التحليلي لحلين مستقلين خطياً هما حلان مستقلان خطياً كذلك .

ولما كان هذان الحلان الجديدان هما حلان للمعادلة التفاضلية المفروضة فإن كلاً منهما تركيب خطي من الحلين w_1 وw_2 ، أي أن :

$$w_1^* = c_{11} w_1 + c_{12} w_2$$

(20)

$$w_2^* = c_{21} w_1 + c_{22} w_2$$

ويكون $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0$ ، لأنه لو لم يكن الأمر كذلك ، لكان

w_1^* و w_2^* مرتبطين خطياً .

لنحاول البحث عن تلك الحلول التي لايختلف عددها عنها بعد دورة واحدة حول a إلا بضروب ثابت ، أي لنبحث عن الحلول التي تحقق :

$$w^* = \mu\, w \qquad (21)$$

بما أن w حل فهو تركيب خطي للحلين المستقلين خطياً w_1 و w_2 ، أي :

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

وبالتمديد دورة واحدة في الاتجاه الموجب حول a يكون :

$$w^* = a_1 w_1^* + a_2 w_2^*$$

وبالاستفادة من (20) و (21) نجد :

$$a_1(c_{11} w_1 + c_{12} w_2) + a_2 (c_{21} w_1 + c_{22} w_2) = \mu\, (a_1 w_1 + a_2 w_2)$$

ولما كان w_1 و w_2 مستقلين خطياً فينبغي أن يكون :

$$(c_{11} - \mu) a_1 + c_{21} a_2 = 0$$

(22)

$$c_{12} a_1 + (c_{22} - \mu) a_2 = 0$$

وإذا نظرنا إلى هاتين المعادلتين على انهما معادلتان بالمجهولين a_1 و a_2 فاننا نجد أنه كي يكون لهذه المجموعة حل غير الحل الصفري ينبغي أن يكون :

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \mu & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0 \qquad (23)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في μ . فإذا كان μ_1 حلاً لهذه المعادلة وإذا

عوضنا هذا الحل في (22) فإننا نجد القيمتين اللتين نبحث عنهما لـ a_1 و a_2 ، وبالتالي نحصل على حل w يحقق (21) .

ولا شك اننا لو انطلقنا من حلين مستقلين خطياً للمعادلة مختلفين عن w_1 و w_2 ، فإن التحويل (20) سيتغير ولكن جـــذري (23) لايتغيران . ويمكن للمرء أن يتحقق من هذا الأمر بإعادة الحسابات منطلقاً من المجموعة الأساسية الجديدة ملاحظاً أن كلا من عنصري هذه المجموعة هو تركيب خطي من عنصري المجموعة الأساسية الأولى w_1 و w_2 غير أننا لانحتاج لمثل هذه الحسابات الطويلة اذا لاحظنـا المعنى المحدد لجذري (23) ، هذا المعنى المستقل عن اختيار الحلول الأساسية .

لنفرض الآن أن $\mu=\mu_1$ هو جذر ا. (23) وأن w_1 هو الحـل الذي يحقق الشرط :

$$w_1^* = \mu_1 w_1$$

ولننظر في التابـع h المعرف بـ :

$$h(z) = (z - a)^{\lambda_1} \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2\pi i} \lg \mu_1$$

إن النقطة $z = a$ هي نقطة تفرع لهذا التابع ، وكل فرع من هذه الفروع تحليلي في جوار z_0 . فإذا انطلقنا من أحد هذه الفروع ، وليكن الفرع الرئيسي مثـــلا :

$$h(z) = e^{\lambda_1 Lg(z - a)}$$

وبعد الدوران مرة واحدة حول $z = a$ في الاتجاه الموجب يضاف إلى [illegible] المقدار $2\pi i$ ، وبالتالي يكون :

$$h^*(z) = e^{\lambda_1 (Lg(z - a) + 2\pi i)} = h(z) e^{Lg \mu_1}$$

$$= \mu_1 h(z)$$

نستنتج من هذا أن التابـع المعرف بـ :

$$z \rightarrow \frac{w_1(z)}{h(z)}$$

يعود إلى قيمته التي انطلق منها بعد دورة كاملة في الاتجـــاه الموجب حول $z=a$ ، فهو تابـع منتظم ويمكن تمثيله بتسلسلة لوران في جوار $z=a$ أي أن :

$$w_1(z) = h(z) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$$= (z-a)^{\lambda_1} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (24)$$

فإذا كان للمعادلة (23) جذران مختلفان فإننا نحصل على حلـين من الشكل (24) أما إذا كان للمعادلة (23) جذر مضاعف فإننا لانحصل إلا على حـــل واحد ، فإذا انطلقنا من هذا الحل w_1 ، وأجرينا التحويل $w = w_1 u$ كما فعلنا في حالة النقطة الشاذة المضاعفة فإننا نجد الشكل التالي للحل الثاني :

$$w_2 = (z-a)^{\lambda_1} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n + b w_1 \lg (z-a) \qquad (25)$$

بفرض أن b ثابت .

وهكذا نصل إلى النتيجة التالية :

إذا كانت $z=a$ نقطة شاذة منعزلة لـ $p(z)$ و $q(z)$ فعندئذ يوجد للمعادلـة التفاضلية المفروضة حلان مستقلان خطياً في جوار هذه النقطة يمثلان بالشكل (24) أو (25) ومن الواضح اننا لو رغبنا الحصول على حل المعادلـة بتعويض المتسلسلة (24) في المعادلة أو المتسلسلة (25) والمطابقة لتعيين الأمثال ، فاننا نحصل ،

بوجه عام ، على عدد غير منته من المعادلات بعدد غير منته من المجاهيل . . .
ولذلك فإن العملية هذه لاتكون ممكنة إلا عندما تحوي النشور في (24) و (25)
عدداً منتهياً فقط من الحدود ذات الأسس السالبة ، وهذه هي حالة النقطة الشاذة
المنتظمة .

(٢ ـ ٦) الحل في جوار نقطة اللانهاية

لدراسة حل المعادلة :

$$w'' + p(z)\ w' + q(z)w = 0 \qquad (26)$$

في جوار $z = \infty$ ، نجري التحويل $z = \frac{1}{t}$ ونبحث عن الحل في جوار الصفر ،
وبعد ايجاد الحل هناك نعود ونضع فيه $t = \frac{1}{z}$ فنحصل على الحل في جوار
اللانهاية .

ولما كان :

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \frac{dw}{dt}$$

$$w'' = \frac{d}{dz} w' = \frac{d}{dz}\left(-t^2 \frac{dw}{dt} \right) = -t^2 \left(-2t \frac{dw}{dt} - t^2 \frac{d^2w}{dt^2} \right)$$

$$= 2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d^2w}{dt^2}$$

فإننا نجد بالتعويض في (26) :

$$t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + \left(2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)\right) \frac{dw}{dt} + q\left(\frac{1}{t}\right) w = 0$$

فإذا كانت النقطة $t = 0$ نقطة شاذة قابلة للازالة لكل من :

$$\frac{2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4} = \frac{2t - p\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} = 2z - z^2 p(z) \qquad (27)$$

$$\frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right) = z^4 q(z) \qquad (28)$$

فان النقطة $t = 0$ ، وبالتالي $z = \infty$ ، نقطة عادية لـ (26) ويكون للمعادلة حلان من الشكل :

$$w = \sum_{0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

ومن الواضح انه يشترط كي تكون $t = 0$ نقطة شاذة قابلة للازالة لـ (27) هو أن يكون :

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = 2t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots$$

أي :

$$p(z) = \frac{2}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots$$

وهذا يعني أن $z = \infty$ هي صفر من المرتبة الأولى وأن $\underset{z \to \infty}{z\,p(z)} \to 2$.

ويشترط كي تكون $t = 0$ نقطة شاذة قابلة للازالة لـ (28) هو أن يكون :

$$q\left(\frac{1}{t}\right) = b_1 t^4 + b_2 t^5 + \dots = \frac{b_1}{z^4} + \frac{b_2}{z^5} + \dots$$

أي أن $z = \infty$ صفر من المرتبة الرابعة على الأقل .

وإذا كانت النقطة $t = 0$ قطباً بسيطاً ، على الأكثر ، لـ (27) ، وقطبـــاً

ثنائياً على الأكثر لـ (z8 ، فـإن هذه النقطة وبالتالي النقطة $\infty = z$ هي نقطة شاذة منتظمة . ومن الواضح أن $\infty = z$ تكون عندئذ صفراً من المرتبـة الأولى على الأقل لـ $p(z)$ ، وصفراً من المرتبة الثانية على الاقل لـ $q(z)$.

ويكون الحل في هذه الحالة من الشكل :

$$w_1 = t^\lambda \sum_o^\infty c_n t^n = \frac{1}{z^\lambda} \sum_o^\infty \frac{c_n}{z^n}$$

أو من الشكل :

$$w_2 = t^\lambda \sum_o^\infty c_n t^n + b\, w_1 \lg t$$

$$= \frac{1}{z^\lambda} \sum_o^\infty \frac{c_n}{z^n} - b w_1 \lg z$$

(٢ ـ ٧) امثلة

(١) إذا نظرنا في المعادلة :

$$w'' + \frac{z-1}{z(z+1)} w' + \frac{2}{(z+1)^2} w = 0$$

فإننا نجد أن $\infty = z$ صفر من المرتبة الأولى لأمثال w' وصفر من المرتبـة الثانية لأمثال w فالنقطة هذه نقطة شاذة منتظمة .

(٢) وإذا نظرنا في المعادلة :

$$w'' + \frac{2z-1}{z(z+1)} w' + \frac{2}{(z+1)^4} w = 0$$

فإننا نجد أن $\infty = z$ صفر من المرتبة الأولى لـ $p(z)$ ، وأن $z\,p(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 2$

وأن $z = \infty$ صفر من المرتبة الرابعة لـ $q(z)$ ، وعلى هذا فإن هذه النقطة نقطة عادية للمعادلة .

٣ ـ معادلة فوكس

إذا كانت جميع النقاط الشاذة للمعادلة التفاضلية :

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

نقطاً شاذة منتظمة ، وكانت نقطة اللانهاية هي على الأكثر نقطة شاذة منتظمة فإننا نسمي المعادلة (1) معادلة فوكس .

وعلى سبيل المثال ان المعادلة :

$$z^2 (1 - z)^2 w'' + z (1 - z^2) w' + (1 + z^2) w = 0 \qquad (2)$$

هي معادلة فوكس ، لأن النقط الشاذة المنتهية لهذه المعادلة هي $z = 0$ و $z = 1$ وكل من هاتين النقطتين نقطة شاذة منتظمة . أما نقطة اللانهاية فهي صفر من المرتبة الأولى لـ $p(z)$ وصفر من المرتبة الثانية لـ $q(z)$ فهي أيضاً نقطة شاذة منتظمة . لنفرض الآن أن النقط الشاذة المنتظمة المنتهية للمعادلة (1) هي $a_1, a_2, \ldots, a_m$. عندئذ ينبغي أن يكون $p(z)$ و $q(z)$ من الشكل :

$$p(z) \equiv \sum_{1}^{m} \frac{A_k}{z - a_k} + p_1(z)$$

$$q(z) \equiv \sum_{1}^{m} \frac{B_k}{(z - a_k)} + \sum_{1}^{m} \frac{C_k}{(z - a_k)^2} + q_1(z)$$

بفرض أن $p_1(z)$ و $q_1(z)$ تحليليان في C ، فهما تابعان صحيحان .

ولكن بما أنه ينبغي أن تكون $z = \infty$ صفراً من المرتبة الأولى على الأقل لـ $p(z)$ فإنه ينبغي أن يسعى $p_1(z)$ إلى الصفر عندما تسعى z إلى اللانهاية

وبالتالي فإن $p_1(z)=0$ وكذلك ينبغي أن تكون $z=\infty$ صفراً من المرتبة الثانية على الأقل لـ $q(z)$ فإنه ينبغي أن يكون $q_1(z)=0$ ، وأن يتحقق كذلك $\lim_{z\to\infty} z\,q(z) \to 0$ ، أي أن يكون :

$$\sum_{1}^{m} B_k = 0 \qquad (3)$$

وعلى سبيل المثال فان المعادلة (2) تكتب بالشكل :

$$w'' + \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{1-z}\right] w' + \left[\frac{2}{z} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{(z-1)^2}\right] w = 0$$

وهنا نلاحظ أن :

$$B_1 = 2 \qquad B_2 = -2 \qquad B_1 + B_2 = 0 \qquad (4)$$

(٣ ــ ١) معادلة فوكس ذات نقطة شاذة واحدة :

إذا فرضنا أن للمعادلة (1) ذات نقطة شاذة واحدة a فعندئذ ينبغي أن يكون :

$$p(z) = \frac{A}{z-a} \qquad q(z) = \frac{B}{z-a} + \frac{C}{(z-a)^2}$$

واستناداً إلى الشرط (4) نرى أنه ينبغي أن يكون $B=0$ ، وبالتالي فالمعادلة (1) من الشكل :

$$w'' + \frac{A}{z-a} w' + \frac{C}{(z-a)^2} w = 0 \qquad (5)$$

وبما أنه ينبغي أن تكون نقطة اللانهاية نقطة منتظمة فإنه ينبغي أن يتحقق

$zp(z) \to 2$ عندما $z \to \infty$ وأن تكون نقطة اللانهاية صفراً من المرتبة الرابعة على الأقل . وعلى هذا فإن $C = 0$ و $A = 2$ ، والمعادلة تأخذ الشكل :

$$w'' + \frac{2}{z - a} w' = 0$$

وحل هذه المعادلة من الشكل :

$$w = \frac{c_1}{z - a} + c_2$$

(٣ ـ ٢) معادلة فوكس بنقطتين شاذتين :

من الواضح أننا إذا فرضنا أن النقطتين الشاذتين هما $z = a$ و $z = \infty$ فمعادلة فوكس هي من الشكل (5) ، وهذه هي معادلة ولر . وتتحول هذه المعادلة إلى معادلة ذات أمثال ثابتة باجراء التحويل $t = \lg(z - a)$.

(٣ ـ ٣) معادلة غوص (المعادلة فوق الهندسية) :

تسمى معادلة فوكس بثلاث نقط شاذة معادلة غوص أو المعادلة فوق الهندسية. ويمكن بتحويل موبيوس نقل هذه النقاط إلى المواضع $0, 1, \infty$. ولذلك سنحاول فيما يلي الوصول إلى هذه المعادلة وإلى حلها فارضين أن النقاط الشاذة المنتظمة هي $0, 1, \infty$. ان مثل هذا الفرض لايقلل من عمومية المسألة .

ومن الواضح انه يكون عندئذ :

$$p(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z - 1} \qquad q(z) = \frac{B_1}{z} - \frac{B_1}{z - 1} + \frac{C_1}{z^2} + \frac{C_2}{(z-1)^2}$$

أو :

$$p(z) = \frac{p_0 + p_1 z}{z(1-z)} \qquad q(z) = \frac{q_0 + q_1 z + q_2 z^2}{z^2(1-z)^2}$$

بفرض :

$$p_0 = -A_1 \quad p_1 = A_1 + A_2 \quad q_0 = C_1 \quad q_1 = B_1 - 2C_1 \quad q_2 = -B_1 + C_1 + C_2$$

فالشكل العام لمعادلة غوص هو :

$$z^2(1-z)^2 w'' + z(1-z)(p_0 + p_1 z) w' + (q_0 + q_1 z + q_2 z^2) w = 0$$

ان المعادلة الدليلية للحل بجوار الصفر هي :

$$\lambda(\lambda - 1) + A_1 \lambda + C_1 = 0 \qquad (6)$$

والمعادلة الدليلية للحل بجوار $z = 1$ هي :

$$\lambda(\lambda - 1) + A_2 \lambda + C_2 = 0 \qquad (7)$$

وللوصول إلى المعادلة الدليلية بجوار $z = \infty$ نجري التحويل $z = \frac{1}{t}$ فتأخذ المعادلة الشكل :

$$t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + \left(2t^3 - A_1 t^3 - \frac{A_2 t^3}{1-t}\right) \frac{dw}{dt} + \left(B_1 t + C_1 t^2 - \frac{B_1 t}{1-t} + \frac{C_2 t^2}{(1-t)^2}\right) w = 0$$

والمعادلة الدليلية هي :

$$\lambda(\lambda - 1) + (2 - A_1 - A_2)\lambda + (C_1 + C_2 - B_1) = 0 \qquad (8)$$

لنرمز لجذري المعادلة (6) بـ α_1, α_2 ولجذري المعادلة (7) بـ β_1, β_2 ولجذري المعادلة (8) بـ γ_1, γ_2 فيكون :

$$\alpha_1+\alpha_2=1-A_1 \quad \beta_1+\beta_2=1-A_2 \quad \gamma_1+\gamma_2=A_1+A_2-1 \qquad (9)$$

$$\alpha_1\alpha_2=C_1 \qquad \beta_1\beta_2=C_2 \qquad \gamma_1\gamma_2=C_1+C_2-B_1$$

ومنه نجد :

$$A_1=1-\alpha_1-\alpha_2 \; A_2=1-\beta_1-\beta_2 \qquad C_1=\alpha_1\alpha_2 \qquad C_2=\beta_1\beta_2$$

$$B_1=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2 \qquad (10)$$

ومن (9) نجد أيضاً

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1$$

أي أن مجموع جميع جذور المعادلات الدليلية يساوي الواحد

ولتبسيط شكل معادلة غوص نجري التحويل :

$$w=z^p(1-z)^q u$$

فلا تتأثر بذلك النقاط الشاذة $0,1,\infty$ ، ولكن الجذرين α_1 وα_2 للمعادلة الدليلية يصبحان α_1-p وα_2-p والجذرين β_1 وβ_2 يصبحان β_1-q و β_2-q فإذا اخترنا p مساوية α_1 و q مساوية β_1 فعندئذ يصبح جذرا المعادلة الدليلية للحل في جوار الصفر هما 0 و $\alpha_2-\alpha_1$ وجذرا المعادلة الدليلية في جوار $z=1$ هما 0 و $\beta_2-\beta_1$.

لنرمز للجذر $\alpha_2-\alpha_1$ بـ $1-\gamma$ ولجذري المعادلة الدليلية في جوار اللانهاية بـ α و β فعندئذ يكون الجذر $\beta_2-\beta_1$ مساوياً $\gamma-\alpha-\beta$ وذلك لأن مجموع جميع جذور المعادلات الدليلية يساوي الواحد، واستناداً إلى (10) ، نجد :

$$A_1=\gamma \quad A_2=1-\gamma+\alpha+\beta \quad C_1=C_2=0 \quad B_1=-\alpha\beta$$

وبالتالي فإن :

$$p(z) = \frac{\gamma}{z} + \frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{z-1} = \frac{-\gamma+(1+\alpha+\beta)z}{z(z-1)}$$

$$q(z) = \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}$$

ومعادلة غوص تكون من الشكل :

$$z(z-1)w'' + (-\gamma + (1+\alpha+\beta)z)w' + \alpha\beta w = 0 \qquad (11)$$

وللحصول على الحل العام لهذه المعادلة في جوار الصفر نضع :

$$w = z^{\lambda} \sum c_n z^n \qquad (c_0 \neq 0)$$

فنجد أن جذري المعادلة الدليلية هما $\lambda = 0$, $\lambda = 1-\gamma$ ، كما نجد :

$$c_{n+1} = \frac{(\lambda+n+\alpha)(\lambda+n+\beta)}{(\lambda+n+1)(\lambda+n+\gamma)} c_n$$

لأجل $\lambda = 0$ يكون :

$$c_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} c_n$$

فإذا فرضنا أن γ لايساوي الصفر أو أي عدد صحيح سالب ، فإن :

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} c_0 = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}$$

وذلك بفرض :

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$$

وباختيار $c_0 = 1$ نجد الحل التالي الموافق لـ $\lambda = 0$

$$w_1 = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \dots + \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n + \dots$$

ولقد جرت العادة أن نرمز للمتسلسلة في الطرف الأيمن بـ $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ وان يسمى مجموعها الدالة فوق الهندسية . ومن الواضح أن هذه المتسلسلة متقاربة في قرص الواحدة . وهذا ينسجم مع وجود نقطة شاذة للمعادلة في الموضع $z = 1$.

ولأجل $\lambda = 1 - \gamma$ نجد :

$$c_{n+1} = \frac{(1-\gamma+n+\alpha)(1-\gamma+n+\beta)}{(2-\gamma+n)(n+1)} c_n$$

وبالتالي فإن :

$$c_n = \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)\dots(\alpha-\gamma+n)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)\dots(\beta-\gamma+n)}{(2-\gamma)(2-\gamma+1)\dots(1-\gamma+n)1.2\dots n} c_0$$

$$= \frac{(\alpha-\gamma+1)_n (\beta-\gamma+1)_n}{n! \; (2-\gamma)_n} c_0$$

وعلى هذا فإن الحل الثاني للمعادلة فوق الهندسية ، بفرض أن γ لايساوي أي عدد صحيح موجب أكبر من 2 ، هو :

$$w_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1; \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z)$$

والحل العام ، بفرض أن γ لاتساوي أي عدد صحيح ، هو :

$$w = C_1 F(\alpha, \beta; \gamma; z) + C_2 z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z)$$

ويمكن الوصول إلى الحل العام في جوار $z = 1$ مباشرة أو باجراء التحويل $t = z - 1$ فنجد :

$$w = C_1 F(\alpha, \beta; 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-z) +$$

$$+C_2(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1+\gamma-\alpha-\beta;1-z)$$

والحل العام في جوار $z=\infty$ هو :

$$w=C_1\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}F\left(\alpha,1+\alpha-\gamma;1+\alpha-\beta;\frac{1}{z}\right)+$$

$$+C_2\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}F\left(\beta,1+\beta-\gamma;1+\beta-\alpha;\frac{1}{z}\right)$$

(٣ – ٤) تمارين

(١) بين أن :

$$(1-z)^{-\alpha}=F(\alpha,\beta;\beta;z)=F(\alpha,1;1;z)$$

$$\lg\frac{1}{1-z}=F(1,1;2;z)$$

$$e^{z}=\lim_{\alpha\to\infty}F\left(\alpha,\beta;\beta;\frac{z}{\alpha}\right)$$

$$\arcsin z=z\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)$$

(٢) برهن أن :

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)$$

(٣) بين أن الحل العام للمعادلة :

$$z(1-z)w''+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1)(1-2z)w'-\alpha\beta w=0$$

الذي يصح في $|z-\tfrac{1}{2}|<\tfrac{1}{2}$ هو :

$$w = AF\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{\alpha}; \frac{1}{2}; (1-2z)^2\right) + B(1-2z)F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}; \frac{3}{2}; (1-2z)^2\right)$$

بفرض أن A وB ثابتان كيفيان .

(٤) بين أن حلول المعادلة :

$$z\,w'' - (1+z)\,w' + w = 0$$

منتظمة في جوار الصفر .

(نقول عن كل نقطة شاذة للمعادلة ولكن الحلول في جوارها منتظمة ، انها نقطة شاذة ظاهرياً . فالنقطة $z = 0$ في المعادلة المذكورة نقطة شاذة ظاهرياً) .

٤ ـ معادلة لوجاندر التفاضلية

لقد عالجنا في البند السابق حل معادلة غوص بفرض أن الفرق بين جذري المعادلة الدليلية لايساوي أي عدد صحيح . سندرس في هذا البند معادلة من نمط معادلة غوص لايتحقق فيها هذا الشرط . هذه المعادلة هي معادلة لوجاندر التفاضلية :

$$(1-z^2)\,w'' - 2z\,w' + n(n+1)\,w = 0 \qquad (1)$$

بفرض أن n عدد صحيح .

تبرز هذه المعادلة ذات الأهمية الكبيرة في الفيزياء الرياضية عندما نحاول الحصول على حل لمعادلة لابلاس .

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

على شكل حدودية من الدرجة n في x وy وz . يسمى مثل هذا الحل توافقية

مجسمة من الدرجة n . فإذا مـــا أجرينا تحويلا في الاحداثيات بالانتقـــال إلى الاحداثيات الكروية :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

تأخذ معادلة لابلاس السابقة الشكل :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0$$

وحيث أن كل توافقية مجسمة من الدرجة n هي من الشكل $r^n s_n(\theta,\varphi)$ ، بفرض أن $s_n(\theta,\varphi)$ حدودية في $\sin\theta , \sin\varphi , \cos\theta , \cos\varphi$ ، فإن s_n تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial s_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 s_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)s_n = 0$$

تسمى $s_n(\theta,\varphi)$ التوافقيات السطحية الكروية من الدرجة n .

وإذا قصرنا اهتمامنا على حلول لهذه المعادلة مستقلة عن φ ، وإذا أجرينـــا التحويل $\cos\theta = \mu$ فإننا نجد المعادلة :

$$(1-\mu^2)\frac{d^2 s_n}{d\mu^2} - 2\mu\frac{d s_n}{d\mu} + n(n+1)s_n = 0$$

ورغم أن s_n , μ ، في التطبيقات الفيزيائيـــة ، كميات حقيقية وأن $-1 < \mu \leqslant 1$ ، فإننا نحصل على دراسة أفضل فيما إذا افترضنا المتحولات عقدية. لذلك سنضع z بدلاً من μ ونضع w بدلاً من s_n فنحصل على المعادلة (1) .

ان النقاط الشاذة للمعادلة (1) هي $-1 , 1 , \infty$ وجميعها نقاط شاذة منتظمة .

(٤ ـ ١) حدوديات لوجاندر :

من المناسب ايجاد الحل العام للمعادلة (1) في جوار نقطة اللانهاية : ولذلك فإننا نبحث عن الحلول من الشكل :

$$w = \frac{1}{z^{\lambda}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{z^r} \qquad c_0 \neq 0$$

بالتعويض في (1) نجد المعادلة الدليلية :

$$-\lambda(\lambda+1) + 2\lambda + n(n+1) = 0$$

وجذراها هما $n+1$ و $-n$. كما نجد :

$$c_r(\lambda + r + n)(\lambda + r - n - 1) = c_{r-2}(\lambda + r - 1)(\lambda + r - 2)$$

لأجل $\lambda = -n$ نجد الحل :

$$w_1 = z^n \left[1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-1 \times 2n-3)} z^{-4} - .. \right] \quad (2)$$

ولاجل $\lambda = n+1$ نجد الحل :

$$w_2 = z^{-n-1} \left[1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} z^{-2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 (2n+3)(2n+5)} z^{-4} + \ldots \right] \quad (3)$$

والحل العام هو :

$$w = A w_1 + B w_2$$

وفي الواقع ونحن نبحث عن الحل الموافق لـ $\lambda = -n$ نصل مباشرة إلى الحل العام لأن المعادلة التي يفترض فيها ان تعين c_{2n+1} تتحول إلى مطابقة .

إن الحل w_1 حدودية في z من الدرجة n فهو يحقق معادلة لوجاندر مهما

كانت قيمة z ، أما الحل الثاني w_2 فهو متسلسلة غـــير منتهية بقوى متناقصة سالبة . وتتقارب هذه المتسلسلة ، عندما $|z| > 1$.

وإذا اخترنا $A = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ فمن الممكن كتابة الحل الأول على الشكل $w = p_n(z)$ بفرض أن :

$$p_n(z) = \sum_{r=0}^{p} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r} \qquad (4)$$

بفرض أن p عدد صحيح يوازي $\frac{n}{2}$ أو $\frac{n-1}{2}$ حسبا يكون n زوجياً أو فردياً ندعو $p_n(z)$ حدوديات لوجاندر من المرتبة n . وبسهولة نرى أن :

$$p_0(z) = 1 \quad p_1(z) = z \quad p_2(z) = \tfrac{1}{2}(3z^2-1) \quad p_3(z) = \tfrac{1}{2}(5z^3-3z)$$

ومن هذا التعريف نستنتج أن :

$$p_n(z) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2^n r!(n-r)!} \frac{d^n}{dz^n}(z^{2n-2r})$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^{p} \frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!} z^{2n-2r}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!} z^{2n-2r}$$

وبالتالي فإن :

$$p_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n \qquad (5)$$

تسمى هذه الصيغة صيغة رودريج (Rodrigue) .

وباستخدام صيغة كوشي المشتق من المرتبة n للتابع التحليلي نحصل من صيغة رودريج (5) على الصيغة التكاملية التالية :

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n (\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \qquad (6)$$

بفرض أن C طريق مغلق يحيط بالنقطة $\zeta = z$.

(٤ ـ ٢) الدالة المولدة لحدوديات لوجاندر

إذا اخترنا الطريق C في (6) هو الدائرة :

$$|\zeta - z| = \sqrt{|z^2 - 1|}$$

عندئذ يكون :

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}\, e^{i\theta} \qquad -\pi \leqslant \theta < \pi$$

على أن نأخذ للجذر التربيعي أي فرع من فرعيه . وعلى هذا فإننا نجد :

$$\zeta^2 - 1 = 2(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\theta] = 2(\zeta - z)[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\theta]$$

وبالتالي فإن :

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\theta]^n d\theta$$

وبما أن المكامل زوجي في θ فإن :

$$p_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\theta]^n d\theta \qquad (7)$$

تسمى هذه الصيغة تكامل لابلاس الأولى لحدودية لوجاندر $p_n(z)$

لنشكل الآن المتسلسلة $\sum h^n p_n(z)$ مستخدمين (7) فنجد :

$$\sum_0^\infty h^n P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h^n [z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\theta]^n \, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_0^\infty h^n [z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\theta]^n \, d\theta$$

وذلك بفرض أن المبادلة بين المكاملة والجمع ممكنة .

لنفرض أن :

$$| h | \leqslant \frac{1-\epsilon}{| z | + \sqrt{| z^2-1 |}} \qquad (0 < \epsilon < 1)$$

فعندئذ يكون :

$$| h[z + (z^2-)^{\frac{1}{2}} \cos\theta] | \leqslant | h | [| z | + | z^2-1 |^{\frac{1}{2}}] < 1-\epsilon$$

وبالتالي فإن المتسلسلة :

$$\sum_0^\infty h^n [z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\theta]^n$$

متقاربة اطلاقاً وبانتظام بالنسبة للمتحول الحقيقي θ ، والمبادلة بين المكاملة والجمع صحيحة وهكذا نجد :

$$\sum_0^\infty h^n p_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [1-hz-h (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\theta]^{-1} \, d\theta$$

$$= (1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

على أن نختار فرع الجذر التربيعي الأخير بحيث يكون هذا الفرع مساوياً

للواحد عندما $h = o$. وللدالة $(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ ، باعتبارها دالة لـ h ، نقطتان شاذتان هما نقطتا التفرع $h = z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$. ولذا فإن هذه الدالة قابلة للنشر وفق تايلور في متسلسلة قوى في h بنصف قطر تقارب هو أصغر القيمتين $|z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}|$. ولكننا رأينا أن هذه الدالة قــابلة للنشر بالشكل $\sum h^n p_n(z)$ لأجل قيم h الصغيرة بقدر كاف . ولما كان نشر تايلور لدالة تحليلية وحيداً فإننا نكون بذلك قد اثبتنا صحة :

$$(1-2hz+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n p_n(z) \qquad (8)$$

شرط أن يكون $|h| < |z\pm(z^2-1)^{1/2}|$. وبشكل خاص إذا كان z حقيقياً وكان $1 \leqslant z < 1 -$ فإن نصف قطر التقارب يساوي الواحد .

٤ ــ ٣ الصيغ التكرارية

هدفنا فيما يلي هو الوصول إلى صيغ تربط بين حدوديات لوجانــدر بمراتب مختلفة وسنستخدم في سبيل ذلك الدالة المولدة :

$$V(z,h) = (1-2hz+h^2)^{-1/2} \qquad (9)$$

ويسهل علينا من (9) أن نثبت مايلي :

$$(1-2hz+h^2)\frac{\partial V}{\partial h} = (z-h)V$$

وبالتالي يكون :

$$(1-2hz+h^2)\sum_{0}^{\infty} n h^{n-1} p_n(z) = (z-h)\sum_{0}^{\infty} h^n p_n(z)$$

حيث تتقارب المتسلسلتان بالاطلاق عندما :

$$|h| < |z \pm (z^2-1)^{1/2}|$$

وبمقارنة أمثال h^{n-1} في الطرفين نجد :

$$n\, p_n(z) - (2n-1)\, z\, p_{n-1}(z) + (n-1)\, p_{n-2}(z) = 0 \qquad (10)$$

كذلك ينتج من (9) أن :

$$h \frac{\partial V}{\partial h} = (z-h) \frac{\partial V}{\partial z}$$

ومنها نستنتج أن :

$$z\, p'_n(z) - p'_{n-1}(z) = n\, p_n(z) \qquad (11)$$

حيث تشير الفتحات إلى الاشتقاق بالنسبة إلى z . وإذا اشتققنا (10) بالنسبة لـ z نجد :

$$n[p'_n(z) - z p'_{n-1}(z)] - (n-1)[z p'_{n-1}(z) - p'_{n-2}(z)] = (2n-1) p_{n-1}(z)$$

واستناداً إلى المتطابقة الأخيرة مع المتطابقة (11) (بعد أن نضع فيها n—1 محل n) نجد :

$$p'_n(z) - z\, p'_{n-1}(z) = n\, p_{n-1}(z) \qquad (12)$$

ويسهل علينا أن نستنتج من (10) و (11) و(12) :

$$p'_{n+1}(z) - p'_{n-1}(z) = (2n+1)\, p_n(z) \qquad (13)$$

$$(z^2-1)\, p'_n(z) = n\, z\, p_n(z) - n\, p_{n-1}(z) \qquad (14)$$

$$(z^2-1)\, p'_n(z) = -(n+1)\, z\, p_n(z) + (n+1)\, p_{n+1}(z) \qquad (15)$$

(٤ - ٤) تمارين

١ - استنتج من صيغة رودريج أن اصفار $p_n(z)$ ، والتي عددها n ، هي جميعها حقيقية وتقع بين 1 - و 1 + .

٢ - برهن أن :

$$p_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n F\left(-\frac{1}{2}n , \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n ; \frac{1}{2} - n ; z^{-2}\right)$$

٣ - بين أن :

$$p_n(z) = F\left(n+1 , -n ; 1 ; \frac{1}{2}(1-z)\right)$$

٤ - بين أن $p_n(z)$ يساوي :

$$(-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n [(\frac{1}{2}n)!]^2} F\left(-\frac{1}{2}n , \frac{1}{2}(n+1) ; \frac{1}{2} ; z^2\right)$$

أو :

$$(-1)^{(n-1)/2} \frac{n!}{2^{n-1}[(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2})!]^2} z F\left[-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} , \frac{1}{2}n+1 ; \frac{3}{2} ; z^2\right]$$

حسبما يكون n زوجياً أو فردياً .

٥ - بين باستخدام صيغة رودريج وبالمكاملة بالتجزئة أن :

$$\int_{-1}^{1} z^k p_n(z)\, dz = 0 \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

وأن :

$$\int_{-1}^{1} p_m(z)\, p_n(z)\, dz = 0$$

عندما يكون m و n صحيحين غير متساويين .

٦ – بين أن :

$$\int_{-1}^{1} z^n\, p_n(z)\, dz = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

واستنتج من ذلك أن .

$$\int_{-1}^{1} [p_n(z)]^2\, dz = \frac{2}{2n+1}$$

٧ – بين أنه يمكن كتابة كل حدودية f(z) من الدرجة n بالشكل :

$$f(z) = \sum_{r=0}^{n} a_r\, p_r'(z)$$

بفرض أن :

$$a_r = \frac{2r+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(z)\, p_r(z)\, dz$$

بين بوجه عام أنه إذا كانت f(z) دالـــة تحليلية يمكن تمثيلها بتسلسلة من الشكل :

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\, p_r(z)$$

تتقارب بانتظام عندما $-1 \leqslant z \leqslant 1$ فإن a_r تعطي بالصيغة السابقة .

٨ – برهن أنه إذا كان $m \geqslant n$ وكان $m - n$ زوجياً فإن :

$$\int_0^1 p_m(z)\, p_n(z)\, dz$$

يساوي الصفر أو $1/(2n+1)$ حسبما يكون m أكبر تماماً من n أو مساوياً لـ n

٩ – بين أن :

$$p_n'(z) = (2n-1)\, p_{n-1}(z) + (2n-5)\, p_{n-3}(z) + \ldots$$

حيث يكون الحد الأخير مساوياً $3p_1$ أو p_0 حسبما يكون n زوجياً أو فردياً . اثبت بالاعتماد على ذلك أو بأية طريقة أخرى أنه إذا كان $m \geqslant n$ فإن :

$$\int_{-1}^{1} p_m'(z)\, p_n'(z)\, dz = \begin{cases} n(n+1) & \text{إذا كان } m-n \text{ زوجياً} \\ 0 & \text{إذا كان } m-n \text{ فردياً} \end{cases}$$

١٠ – بين أن قيمة التكامل :

$$\int_{-1}^{+1} z\,(1-z^2)\, p_m'(z)\, p_n'(z)\, dz$$

تساوي الصفر مالم يكن $m = n \pm 1$. أوجد قيمة التكامل في هاتين الحالتين المستثنيتين .

٥ – تمثيل الحلول بتكاملات

لقد لجأنا في الفقرات السابقة إلى تمثيل حلول المعادلات التفاضلية بتسلسلات قوى وذلك لأنه ليس من الممكن دائماً الوصول إلى حل على شكل تركيب منته

من دوال ابتدائية . وبالاضافة إلى هذه الطريقة هناك طريقة اخرى للقيام بعملية الانتقال إلى النهايات على الدوال الابتدائية هي المكاملة بالنسبة لوسيط مثل :

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

سنحاول في هذا البند الوصول إلى حلول من هذا النمط للمعادلات التفاضلية .

ويمكن التصرف بالحل بشكل أفضل إذا كان تكاملاً لدالة حقيقية بالنسبة لمتغير حقيقي ، ولكن هناك فوائد عديدة في مناقشة المسألة على القاعدة الأعرض لنظرية الدوال العقدية ، ولذا فإننا سنبحث عن حلول من الشكل :

$$w = \int_C f(z, \zeta)\, d\zeta$$

بفرض أن C طريق في المستوي ζ .

ونود منذ البداية أن نلفت النظر إلى أنه إذا حوى المكامل على عبارة مثل $(\zeta - a)^\alpha$ فإننا نفهم من ذلك أحد فروعها الذي نختاره من أجل وضع مناسب لـ ζ .

(٥ ــ ١) معادلة لابلاس التكاملية :

لنبدأ بمعالجة معادلة يسهل تمثيل حلولها بتكاملات عقدية . هذه المعادلة هي :

$$(a_n z + b_n) w^{(n)} + \dots + (a_1 z + b_1) w' + (a_0 z + b_0) w = 0 \quad (1)$$

وهي معادلة من المرتبة n أمثال w فيها وأمثال مشتقات w هي من الدرجة الأولى في z .

انبحث لهذه المعادلة عن حل من النمط :

$$w = \int_C e^{z\zeta} P(\zeta)\, d\zeta \qquad (2)$$

بعبارة أخرى لنبحث عن دالة $p(\zeta)$ وطريق C بحيث يكون w حـلاً لـ (1) . لنفرض أن $P(\zeta)$ و C هي بحيث يمكن الاشتقـــاق بالنسبة لـ z تحت رمز المكاملة .

لنعوض (2) في (3) فنجد :

$$\int_C e^{z\zeta} p(\zeta)[z\, Q(\zeta) + R(\zeta)]\, d\zeta = 0 \qquad (3)$$

بفرض أن :

$$Q(\zeta) = a_n \zeta^n + \ldots + a_1 \zeta + a_0$$

$$R(\zeta) = b_n \zeta^n + \ldots + b_1 \zeta + b_0$$

ويكون المكامل في (3) مشتقاً تاماً :

$$\frac{d}{d\zeta}[e^{z\zeta} S(\zeta)]$$

إذا كان :

$$S(\zeta) = p(\zeta)\, Q(\zeta) \qquad S'(\zeta) = P(\zeta) R(\zeta)$$

وعلى هذا فإننا نستطيع الحصول على $S(\zeta)$ من :

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{R(\zeta)}{Q(\zeta)} = k_0 + \frac{k_1}{\zeta - \alpha_1} + \ldots + \frac{k_n}{\zeta - \alpha_n}$$

بفرض أن $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ جذور $Q(\zeta)$ وأن درجة $Q(\zeta)$ لاتقل عن درجة $R(\zeta)$. وإذا فرضنا أن هذه الجذور مختلفة ، فإننا نجد :

$$S(\zeta) = e^{k_0\zeta}(\zeta-\alpha_1)^{k_1}\dots(\zeta-\alpha_n)^{k_n}$$

$$P(\zeta) = \frac{1}{b_n} e^{k_0\zeta}(\zeta-\alpha_1)^{k_1-1}\dots(\zeta-\alpha_n)^{k_n-1}$$

وتأخذ المعادلة (3) الشكل :

$$\int_C \frac{d}{d\zeta}\left(e^{z\zeta}S(\zeta)\right)d\zeta = \left[e^{z\zeta}S(\zeta)\right]_C$$

وهذا يعني أن (2) تكون حلاً لـ (1) اذا اخترنا C على نحو يكون فيه :

$$[\varphi(\zeta)]_c = [e^{(z+k_0)\zeta}(\zeta-\alpha_1)^{k_1}\dots(\zeta-\alpha_n)^{k_n}]_c = 0$$

وقبل أن نقدم مناقشة عامة حول الطريق C فإننا نجد من المناسب تناول مثال توضيحي .

مثال :

لتكن لدينا المعادلة :

$$z w'' + (p+q+z)w' + pw = 0 \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

لنعوض (2) في هذه المعادلة فنحصل على :

$$\int_C e^{z\zeta} P(\zeta)\,[z\,Q(\zeta) + R(\zeta)]\,d\zeta = 0$$

حيث يكون :

$$Q(\zeta) = \zeta^2 + \zeta \qquad R(\zeta) = (p+q)\zeta + p$$

ويكون المكامل مشتقاً تاماً :

$$\frac{d}{d\zeta}\left(e^{z\zeta} S(\zeta)\right)$$

إذا كان :

$$S(\zeta) = (\zeta^2 + \zeta) P(\zeta) \qquad S'(\zeta) = [(p+q)\zeta + p] P(\zeta)$$

وعلى هذا فإن :

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{p}{\zeta} + \frac{q}{\zeta+1}$$

وبالتالي :

$$S(\zeta) = \zeta^p (\zeta+1)^q \qquad P(\zeta) = \zeta^{p-1} (\zeta+1)^{q-1}$$

وعلى هذا فإن :

$$\int_C e^{z\zeta} \zeta^{p-1} (\zeta+1)^{q-1} d\zeta$$

حل ، إذا كان :

$$[e^{z\zeta} \zeta^p (\zeta+1)^q]_C = 0$$

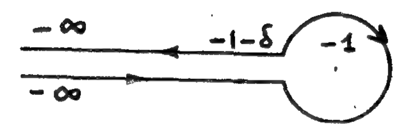
فإذا فرضنا z على المحور الحقيقي وأن $p > 0$ و $q > 0$ فإن المقدار بين القوسين الكبيرين ينعدم عندما $\zeta = 0$ و $\zeta = -1$. وإذا كان $z > 0$ فإن هذا المقدار ينعدم من أجل $\zeta = -\infty$ ، أما إذا كان $z < 0$ فإنه ينعدم من أجل $\zeta = \infty$. وهكذا نصل إلى حلول للمعادلة يمكن أن نختار فيها C فترة من المحور الحقيقي وذلك على النحو التالي :

إذا كان $p > 0$ و $q > 0$ فيمكن اختيار C الفترة $(-1, 0)$.

وإذا كان $p > 0$ و $z > 0$ فمن الممكن اختيار C الفترة $(-\infty, 0)$.

أما إذا كان $p > 0$ و $q > 0$ و $z > 0$ فلا توجد اية قطعة من المحور الحقيقي يمكن اختيارها الطريق C ، ولكننا قد نستطيع اختيار طريق يتكون من جزء من المحور الحقيقي من $-\infty$ إلى $-1-\delta$ يتبعه دائرة نصف قطرها δ ومركزها -1 ثم نعود من $-1-\delta$ إلى $-\infty$.

ان هذه الدراسة ليست تامة ولكنها تصلح تمهيداً لما يلي .

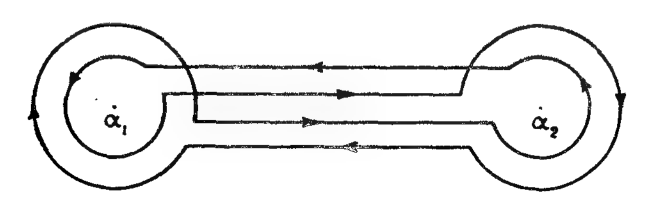


(٥ — ٢) اختيار الطرق :

يوجد بوجه عام انماط ممكنة عدة للطريق C . قد يكون من الممكن مثلا أن نختار C طريقاً مغلقاً بحيث تعود $\varphi(\zeta)$ إلى قيمتها الابتدائية ويتحقق بذلك الشرط $[\varphi(\zeta)]_C$. في هذه الحالة يجب أن يقع داخل C احدى النقط α_r ، لأنه إذا لم يحدث ذلك فاننا سوف لانحصل إذن على الحل التافه $w = 0$.

وقد يكون من الممكن كذلك اختيار الطريق C بحيث يذهب إلى اللانهاية في منحى أو أكثر بحيث يسعى $\varphi(\zeta)$ إلى الصفر . وبما أن $\varphi(\zeta)$ يتعلق بـ z فإن هذه المناحي تتعلق عموماً بـ z .

وعندما تدور ζ حول النقطة α_1 في الاتجاه الموجب فإن $(\zeta-\alpha_1)^{k_1}$ تضرب بعد الدوران بـ $e^{2\pi i k_1}$. ولذلك يمكن اختيار C على شكل عقدة مضاعفة كما في الشكل .

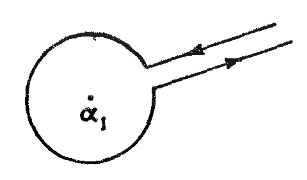


ولقد رسمنا اجزاء الشكل منفصلة بغية التوضيح . ويمكن في الواقع اختيار الشكل بحيث يتألف من دائرتين حول كل من α_1 و α_2 باتجاهين متعاكسين مع قطع مستقيمة تصل بينهما .

وإذا اخذنا عقداً مضاعفة حول α_1 وحول كل من $\alpha_2, ..., \alpha_n$ على الترتيب فإننا نحصل بوجه عام على $n - 1$ حلاً مستقلاً للمعادلة . ولهذه الحلول مزية وهي انها تصلح مهما كانت z .

ولاثبات الاستقلال الخطي لهذه الحلول ، باستخدام رانز رونسكي مثلاً ، نحتاج إلى حسابات متعبة . ولذلك نكتفي بملاحظة مايلي : إذا كان من الممكن تشويه شكل الطريق C_1 بشكل مستمر إلى طريق آخر C_2 دون أن نمر على أي من النقاط α_i فإن التكامل على C_1 لايختلف عن التكامل على C_2 وبالتالي فإننا نحصل على الحل ذاته . اما إذا لم يمكن القيام بمثل هذا التشويه فإن قيمتي التكامل مختلفتان بوجه عام . ويمكن للقارىء أن يرى استحالة تشويه أي من العقد المضاعفة المعرفة قبل قليل إلى عقدة مضاعفة أخرى دون ان نمر على النقط α_i .

ولاختيار الحل الأخير المستقل للمعادلة نختار منحى في المستوي ع بحيث يكون القسم الحقيقي لـ ع $(z + k)$ سالباً ويمكن عندئذ اختيار طريق المكاملة ذلك الطريق القادم من اللانهاية على ذلك المنحى ، والذي يدور بعد ذلك حول α_1 (دون أن يدور حول أي α_i أخرى) ثم يعود إلى اللانهاية في الاتجاه ذاته ويمكن اختيار n طريقاً على هذا النحو لنحصل على n حلاً بدلاً من اللجوء إلى العقد المضاعفة .



هذا ويمكن في بعض الاحيان تبسيط العقدة المضاعفة إلى عقدة على شكل 8 تدور حول نقطتين من النقط a_i باتجاهين معاكسين كما سنرى على ضوء مثال بعد قليل . ولنسأل الآن كيف نجد الحلول المستقلة عندما لاتكون النقط a_i مختلفة . سنكتفي بمعالجة هذه الحالة على ضوء بعض الأمثلة الخاصة .

(٥ ـ ٣) امثلة :

١ ـ لتكن لدينا المعادلة :

$$a_n w^{(n)} + \dots + a_1 w' + a_0 w = 0$$

بأمثال ثابتة .

بسهولة نجد أن :

$$w = \int_C e^{z\zeta} P(\zeta)\, d\zeta$$

يكون حلاً إذا كان :

$$\int_C e^{z\zeta} P(\zeta)\, R(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad (5)$$

بفرض أن :

$$R(\zeta) = b_n \zeta^n + \dots + b_1 \zeta + b_0$$

لنفرض أن $(\zeta - \alpha)^r$ هو مضروب لـ $R(\zeta)$. عندئذ يكون الشرط (5) محققاً إذا كان :

$$P(\zeta) = \frac{A_r}{(\zeta - \alpha)^r} + \dots + \frac{A_1}{\zeta - \alpha} + p(\zeta)$$

بفرض أن $p(\zeta)$ تحليلي عند $\zeta = \alpha$ ، وأن C طريق يحيط بـ α دون

أي صفر آخر لـ $R(\zeta)$.

واستناداً إلى صيغة كوشي التكاملية نجد :

$$\int_C e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta = e^{z\alpha} (B_{r-1} z^{r-1} + \dots + B_0) \qquad (6)$$

حيث تكون $B_0, \dots, B_{r-1}$ ثوابت . ان (6) تعطينا r حـــلا مستقلاً توافق الجذر المضاعف α من المرتبة r .

٢ ــ أما المعادلة :

$$z w'' + (2\nu + 1) w' + z w = 0 \qquad (\nu \text{ ثابت})$$

فإنها تقبل الحل :

$$w = \int_C e^{z\zeta} (\zeta^2 + 1)^{\nu - \frac{1}{2}} d\zeta$$

إذا تحقق :

$$[e^{z\zeta} (\zeta^2 + 1)^{\nu + \frac{1}{2}}]_c = 0$$

ويكون هذا الشرط محققاً إذا اخترنا C طريقاً على شكل 8 تحيط احدى عقدتيه بالنقطة $\zeta = i$ وتحيط الاخرى بالنقطة $\zeta = -i$ وذلك لأن المضروبين $e^{\pm 2\pi i(\nu + \frac{1}{2})}$ اللذين يبرزان بسبب $(\zeta - i)^{\nu + \frac{1}{2}}$ و $(\zeta + i)^{\nu + \frac{1}{2}}$ على الترتيب ، يلغي أحدهما الآخر . (نفرض أن ν ليست أياً من القيم ...، $\frac{5}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ وإلا فإن الحل هو $w = 0$) .

ويمكن تبسيط النتيجة في هذا المثال فيما إذا وضعنا it بدلاً من ح وبذلك تتحول النقطتان $\pm i$ إلى ± 1 .

وهكذا نرى أن $w = \int_C e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$ حل للمعادلة المفروضة بالاختيارات التالية للطريق C .

(١) القطعة المستقيمة من -1 إلى $+1$ عندما يكون $\nu > -\frac{1}{2}$

(٢) عقدة على شكل 8 حول -1 و $+1$ عندما لاتكون ν أياً من القيم $\ldots , \frac{5}{2} , \frac{3}{2} , \frac{1}{2}$.

(٣) طريق قادم من اللانهاية موازياً للمحور التخيلي الموجب ، ويدور حول -1 أو $+1$ ثم يعود إلى اللانهاية موازياً للمحور ذاته ، وذلك عندما تكون z حقيقية وموجبة .

٣ - سنشرح في هذا المثال حالة طرق تأتي من اللانهاية وفق منحى وتعود إليها وفق منحى آخر :

$$w'' = z w$$

أن تعويض :

$$w = \int_C e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta$$

في هذه المعادلة يعطي $p(\zeta) = e^{-\frac{1}{3}\zeta^3}$ ، حيث ينبغي أن يحقق C الشرط :

$$[\varphi(\zeta)]_C = [e^{z\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3}]_C = 0$$

وهنا نلاحظ (أنه مهما كانت قيمة z) فإن $0 \to (\zeta)\,\varphi$ عندما تسعى ζ إلى اللانهاية شرط أن تبقى زاوية ζ واقعة داخل أي من القطاعات الثلاثة $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right)$ ، $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ، $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}-\right)$ وعلى هذا من الممكن مثلا اختيار C قادماً من اللانهاية ضمن القطاع الثاني وراجعاً اليها ضمن القطاع الاول أو قادماً من اللانهاية ضمن القطاع الثالث وراجعاً إليها ضمن القطاع الثاني .

(٥ ـ ٤) تكاملات تشتمل على قوى لـ $(\zeta-z)$

ان السمة التى اتصفت بها معادلة لابلاس والتي جعلت من المناسب البحث عن حل على شكل تكاملات تكون فيها « النواة » $e^{z\zeta}$ ، هي الخطية في z لأمثال كل من $w^{(r)}$. ولذلك فلقد كان المكامل الناتج عن التعويض في المعادلة التفاضلية المفروضة هو اشتقاق أول تام لدالة $S(\zeta)\,e^{z\zeta}$ ، وكانت المعادلة التفاضلية التي تعين $S(\zeta)$ من المرتبة الأولى . أما إذا كانت أمثال $w^{(r)}$ حدوديات من الدرجة m ، فإن علينا أن نحاول وضع المكامل على شكل مشتق من المرتبة m ، وستكون عندئذ المعادلة التي تعين $S(\zeta)$ من المرتبة m وبالتالي قد يكون حلها أعقد من حل المعادلة التفاضلية المفروضة .

ولذلك فمن الطبيعي أن نبحث عن تكاملات تأخذ فيها النواة شكلاً آخر غير الشكل الأسي، ولقد اتضح أن أحد هذه الأشكال يعطى بالتكامل :

$$\int_C (\zeta - z)^{\lambda+1}\, p(\zeta)\, d\zeta \qquad (7)$$

بفرض أن λ ثابت ينبغي تعيينه . ان هذا الشكل مناسب لمعادلة تكون فيها أمثال $w^{(r)}$ حدودية من الدرجة r في z . وسنبين ذلك في حالة معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية :

$$q(z)\,w'' + l(z)\,w' + kw = 0 \qquad (8)$$

بفرض أن $q(z)$ حدودية في z من الدرجة الثانية و $l(z)$ حدودية من الدرجة الأولى و k ثابت . لنكتب (8) بالشكل . .

$$q(z)\,w'' - \lambda\, q'(z)\, w' + \frac{1}{2}\,\lambda(\lambda+1)\, q''(z)\, w$$

(9)

$$- r(z)\, w' + (\lambda+1)\, r'(z) w = 0$$

إن هذا الأمر ممكن لأن مقارنة الأمثال بين (8) و (9) تعين لنا λ والحدودية من الدرجة الأولى $r(z)$ (انظر المثال التالي) .

بتعويض (7) في (9) نجد .

$$\int_C p(\zeta)\Big[\lambda(\lambda+1)(\zeta-z)^{\lambda-1}[q(z)+(\zeta-z)q'(z)+\tfrac{1}{2}(\zeta-z)^2 q''(z)\Big]\, d\zeta = 0$$

$$+(\lambda+1)(\zeta-z)^{\lambda}[r(z)+(\zeta-z)\, r'(z)]$$

أو :

$$\int_C p(\zeta)\,[\lambda(\zeta-z)^{\lambda-1}\, q(\zeta) + (\zeta-z)^{\lambda}\, r(\zeta)]\, d\zeta = 0$$

ويكتب المكامل بالشكل :

$$\frac{d}{d\zeta}\,(S(\zeta)\,(\zeta-z)^{\lambda}]$$

إذا كان :

$$S(\zeta) = p(\zeta)\, q(\zeta)$$

$$S'(\zeta) = p(\zeta)\, r(\zeta)$$

وعلى هذا فإن $S(\zeta)$ تتعين بالمعادلة :

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{r(\zeta)}{q(\zeta)} = \frac{p}{\zeta-\alpha_1} + \frac{q}{\zeta-\alpha_2}$$

بفرض أن α_2, α_1 جذرا $q(\zeta)$. وهكذا نجد الحل :

$$w = \int_C (\zeta-\alpha_1)^{p-1} (\zeta-\alpha_2)^{q-1} (\zeta-z)^{\lambda+1} d\zeta$$

شرط أن نختار C محققاً لـ :

$$[(\zeta-\alpha_1)^p (\zeta-\alpha_2)^q (\zeta-z)^\lambda]_C = 0$$

ويتم اختيار C وفق المبادىء التي تحدثنا عنها في الفقرة السابقة .

(٥ ـ ٥) مثال

لنستخدم الطريقة الأخيرة على معادلة غوص :

$$z(z-1)w'' + [-\gamma + (\alpha+\beta+1)z]\, w' + \alpha\beta w = 0$$

نجد هنا :

$$q(z) = z(z-1)$$

$$\lambda(2z-1) + r(z) = \gamma - (\alpha+\beta+1)z$$

$$\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)(2) + (\lambda+1)\, r'(z) = \alpha\beta$$

وبحذف $r(z)$ نجد $\lambda = -\alpha-1$ أو $\lambda = -\beta-1$ فإذا أخذنا $\lambda = -\alpha-1$

نجد $r(z) = (\alpha-\gamma+1) - (\alpha-\beta+1)z$ ويكون :

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{r(\zeta)}{q(\zeta)} = \frac{\alpha-\gamma+1}{\zeta} - \frac{\gamma-\beta}{1-\zeta}$$

وبالتالي لدينا الحل :

$$w = \int_C \zeta^{\alpha-\gamma}(1-\zeta)^{\gamma-\beta-1}(\zeta-z)^{-\alpha} d\zeta \qquad (10)$$

على أن يحقق C الشرط :

$$\left[\zeta^{\alpha-\gamma+1}(1-\zeta)^{\gamma-\beta}(\zeta-z)^{-\alpha-1}\right]_C = 0$$

وهنا نلاحظ أنه يمكن اختيار C العقدة المضاعفة حول $\zeta=0$ و $\zeta=1$ أو حول $\zeta=0$ و $\zeta=z$ مالم تكن قيم α,β,γ هي بحيث تسمح بطريق من نمط أبسط .

أما القيمة الثانية $\lambda = -\beta-1$ فهي تعطي حلا آخر نحصل عليه من الأول بالمبادلة بين α و β .

لنضع أخيراً في (10) $\zeta = \frac{1}{\eta}$ فنحصل على:

$$w = \int_C \eta^{\beta-1}(1-\eta)^{\gamma-\beta-1}(1-z\eta)^{-\alpha} d\eta$$

بفرض أن C طريق مناسب . فإذا كان مثلاً $Re\gamma > Re\beta > 0$ فإنه من الممكن اختيار C القطعة $(0,1)$ من المحور الحقيقي .

(٥ ــ ٦) تمارين للحل

١ ــ أوجد حلا للمعادلة التفاضلية :

$$w'' - 2zw' + 2kw = 0 \qquad (k \geqslant 0)$$

بالشكل $\int_C e^{2z\zeta} f(\zeta) d\zeta$. أعط اختيارين للطريق C .

برهن أنه إذا كان k صحيحاً موجباً فهناك حل من الشكل :

$$H_k(z) = (-1)^k e^{z^2} \frac{d^k}{dz^k} e^{z^2}$$

٢ – أوجد حلين لمعادلة التمرين الأول من الشكل :

$$\int e^{z^2\zeta}\, \zeta^{-1-\frac{1}{2}k}(1-\zeta)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k} d\zeta \qquad z\int e^{z^2\zeta}\, \zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k}(1-\zeta)^{\frac{1}{2}k} d\zeta$$

على طريق مناسب .

٣ – أوجد حلول المعادلة التفاضلية :

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$$

ابحث كذلك عن حلول من الشكل $\int_C e^{2xt}\, u(t)\, dt$ بفرض أن C طريق مناسب . بين بوجه خاص انه إذا كان $\lambda < 0$ فإن :

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2+2xt}\, t^{\lambda-1} dt \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2xt}\, t^{-\lambda-1} dt$$

حلان ، ثم أوجد ثانية الحلول على شكل متسلسلات بدءاً من هذين الحلين .

٤ – بين أنه يمكن للمعادلة التفاضلية :

$$zw'' + 2aw' - zw = 0$$

بفرض أن a ثابت ، يمكن أن تتحقق بـ

$$w = \int_C (t^2-1)^{a-1} e^{tz} dt$$

بفرض أن C طريق مناسب . بين ، بوجه خاص ، أن الطرق التالية ممكنة

(آ) شكل 8 يدور حول النقطتين $t = 1 , t = -1$ بالاتجاهين المتعاكسين

(ب) طريق يأتي من $\infty -$ على المحور الحقيقي ويـــدور حول $t = -1$ ويعود إلى $\infty -$ على المحور الحقيقي أيضاً وذلك بشرط أن يكون $Re\ z > o$

(ﺣ) المحور الحقيقي من $t = -1$ إلى $t = 1$ شرط أن يكون $a > o$

(د) المحور الحقيقي من $\infty -$ إلى -1 شرط أن يكون $Re\,z > o$ و $a > o$

بين أنه إذا تحققت الشروط المذكورة فإن الحل المعطى بـ (ب) هو جداء ثابت بالحل المعطى بـ (د) . بين أنه إذا كان $a = o$ فإن الطريقين (آ) و (ب) يعطيان حلين مستقلين خطياً .

٥ – بين أن للمعادلة :

$$z\,w'' + c\,w' - w = o$$

حلولاً من الشكل :

$$\int e^{z\zeta + \frac{1}{\zeta}}\, \zeta^{c-2}\, d\zeta \qquad\qquad z^{1-c} \int e^{z\zeta + \frac{1}{\zeta}}\, \zeta^{-c}\, d\zeta$$

عين الطرق المناسبة .

٧ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$z\,w''' + w = o$$

على شكل تكاملات محيطية .

ابحث في حلول على شكل تكاملات عقدية للمعادلات التالية :

$$4z(1-z)w'' + 2(1-2z)w' + w = 0$$

$$z(1-z)w'' - (1+z)w' + w = 0$$

$$w''' = zw$$

$$z\,w'' + (2+az)w' + (a+bz)w = 0$$

وابحث في كل معادلة عن الطرق المناسبة .

٦ ـ النشر المقارب للحلول :

اذا كان للمعادلة التفاضلية نقطة شاذة (غير منتظمة) في اللانهاية ، وإذا كنا نريد أن نتعرف على طبيعة الحل لأجل z في جوار اللانهاية فانه من المفيد استخدام النشر المقارب للحل . سنقدم فيما يلي فكرة موجزة عن النشر المقارب ثم عن النشر المقارب للحلول .

(٦ – ١) **النشر المقارب** : نقول عن متسلسلة من الشكل :

$$A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_n}{z^n} + \dots$$

التي قد تكون متقاربة لأجل القيم الكبيرة لـ | z | ، أو تكون متباعدة مهما كانت z ، إنها نشر مقارب لـ F (z) في مدى معين لـ arg z ، مثلا $\alpha \geqslant \arg z \geqslant \beta$ ، فيما إذا سعت العبارة

$$z^n \left\{ F(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} - \frac{A_2}{z^2} \dots - \frac{A_n}{z^n} \right\}$$

لأجل كل عدد صحيح غير سالب ثابت n ، إلى الصفر عندما $|z| \to \infty$ شرط أن تبقى arg z في المدى المفروض وإذا صح ذلك فإننا نكتب :

$$F(z) \sim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \qquad (1)$$

ويقتضي هذا التعريف ، الذي يعود الفضل فيه إلى بوانكاريه ، أن يكون الفرق بين F (z) وبين مجموع الحدود الـ n الأولى من النشر المقارب من مرتبة الحد الـ (n+1) وذلك عندما يكون | z | كبيراً . إن هذه الحقيقة هي التي جعلت النشر المقارب أكثر ملاءمة للحسابات العددية من المتسلسلات المتقاربة .

وإذا صحت (1) فإن الأمثال A_i تتعين تدريجياً بالمعادلات :

$$\lim_{|z| \to \infty} F(z) = A_0$$

$$\lim_{|z| \to \infty} z \{F(z) - A_0\} = A_1 \qquad (2)$$

$$\lim_{|z| \to \infty} z^2 \{ F(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \} = A_2 \ldots$$

نستنتج من هذا أنه لايمكن أن يكون لدالة معينة ، في مدى مفروض لـ arg z ، أكثر من نشر مقارب واحد .

غير أن نشراً مقارباً واحداً قد يكون لأكثر من دالة . فـإذا حقق f (z) وg (z)

$$\lim_{|z| \to \infty} z^n \{f(z) - g(z)\} = 0$$

لأجل كل عدد صحيح موجب ثابت n شرط أن تبقى arg z في المدى المفروض فإن لـ f(z) وg (z) النشر المقارب نفسه .

فإذا لاحظنا ، على سبيل المثال أن $\lim_{|z| \to \infty} z^n e^{-z} = 0$ لأجل : $| \arg z | < \frac{\pi}{2}$ فإن لـ f(z) و $f(z) + e^{-z}$ النشر المقارب نفسه في ذلك المدى لـ arg z .

وقد يحصل أحياناً أن لايكون لـ F(z) نشر مقارب ، غير أنه توجد دالة G(z) بحيث يكون :

$$\frac{F(z)}{G(z)} \sim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

لأجل مدى معين لـ arg z . نكتب في هذه الحالة :

$$F(z) \sim G(z) \left\{ A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right\}$$

(٦ - ١ - ١) إذا كان $f(z) \sim \sum_0^\infty A_m z^{-m}$ و $g(z) \sim \sum_0^\infty B_m z^{-m}$ في مدى مشترك لـ arg z فإن :

$$f(z)\, g(z) \sim \sum_0^\infty C_m z^{-m}$$

بفرض أن :

$$C_m = A_0 B_m + A_1 B_{m-1} + A_2 B_{m-2} + \dots + A_m B_0$$

ولاثبات ذلك نلاحظ بالاعتماد على (2) أن :

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) g(z) = A_0 B_0 = C_0$$

$$\lim_{|z| \to \infty} z \{ f(z) g(z) - C_0 \} =$$

$$\lim_{|z| \to \infty} z \{ (f(z) - A_0)(g(z) - B_0) + A_0 (g(z) - B_0) + B_0 (f(z) - A_0) \}$$

$$= A_1 . 0 + A_0 B_1 + B_1 A_0 = C_1$$

وبوجه عام :

$$\lim_{|z|\to\infty} z^n\{ f(z)\, g(z) - C_0 - \frac{C_1}{z} - \frac{C_2}{z^2} \dots - \frac{C_{n-1}}{z^{n-1}} \} =$$

$$= \lim_{|z|\to\infty} z^n \{ \left(f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \dots - \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \right)\left(g(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} \dots - \frac{B_{n-1}}{z^{n-1}} \right)$$

$$+ A_0 \left(g(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} \dots - \frac{B_{n-1}}{z^{n-1}} \right)$$

$$+ \frac{A_1}{z} \left(g(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} \dots - \frac{B_{n-2}}{z^{n-2}} \right)$$

$$+ \frac{A_2}{z^2} \left(g(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} \dots - \frac{B_{n-3}}{z^{n-3}} \right) + \dots + \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \left(g(z) - B_0 \right)$$

$$+ B_0 \left(f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \dots - \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \right)$$

$$+ \frac{B_1}{z} \left(f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \dots - \frac{A_{n-2}}{z^{n-2}} \right)$$

$$+ \frac{B_2}{z^2} \left(f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} \dots - \frac{A_{n-3}}{z^{n-3}} \right) + \dots + \frac{B_{n-1}}{z^{n-1}} \left(f(z) - A_0 \right)$$

$$- (A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2} + \dots + A_{n-1} B_1) \frac{1}{z^n} \}$$

$$= A_n . 0 + A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \dots + A_{n-1} B_1 + B_0 A_n + B_1 A_{n-1} + \dots + B_{n-1} A_1$$

$$- A_1 B_{n-1} - A_2 B_{n-2} \dots - A_{n-1} B_1 = C_n$$

(٦ - ١ - ٢) اذا كان :

$$f(x) \sim \sum_{2}^{\infty} A_m x^{-m}$$

بفرض أن x موجب ، فإن :

$$\int_x^{\infty} f(x)\ dx \sim \sum_1^{\infty} \frac{A_{m+1}}{m x^m}$$

ويكفي لاثبات ذلك أن نبين أن :

$$\lim_{x \to \infty} x^{n-1} \left\{ \int_x^{\infty} f(x)\ dx - \frac{A_2}{x} - \frac{A_3}{2x^2} \dots - \frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}} \right\} = 0$$

بما أن :

$$f(x) \sim \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \dots$$

فإنه إذا كان ϵ عدداً موجباً مفروضاً فاننا نستطيع ايجاد x_0 بحيث يكون :

$$x^n \left[f(x) - \frac{A_2}{x^2} - \dots - \frac{A_n}{x^n} \right] < \epsilon \qquad x \geqslant x_0$$

وبالتالي فإن :

$$f(x) < \epsilon x^{-n} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^n}$$

$$\int_x^{\infty} f(x)\, dx - \frac{A_2}{x} - \frac{A_3}{2x^2} \dots - \frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}} < \frac{\epsilon}{(n-1)x^{n-1}}$$

ومنه نجد المطلوب .

(٦ ـ ٢) النشر المقارب لحل معادلة لابلاس من الشكل

$$z w'' + (a_0 z + a_1) w' + (b_0 z + b_1) w = 0 \qquad (3)$$

نجري أولاً التحويل :

$$w = e^{\alpha z} u$$

فنجد بعد الاختصار على $e^{\alpha z}$:

$$z u'' + [(a_0 + 2\alpha) z + a_1] u' + [(\alpha^2 + \alpha a_0 + b_0) z + b_1 + \alpha a_1] u = 0 \quad (4)$$

نختار α احد الجذرين α_1 و α_2 للمعادلة :

$$\alpha^2 + \alpha a_0 + b_0 = 0 \quad (5)$$

وليكن $\alpha = \alpha_1$ فتأخذ المعادلة (5) الشكل :

$$z u'' + [(a_0 + 2\alpha_1) z + a_1] u' + (b_1 + \alpha_1 a_1) u = 0 \quad (6)$$

لنضع بغية الإختصار :

$$a_0 + 2\alpha_1 = \beta \qquad b_1 + \alpha_1 a_1 = b_2$$

فتأخذ (6) الشكل :

$$z u'' + (\beta z + a_1) u' + b_2 u = 0 \quad (7)$$

واستناداً إلى البند الخامس نرى ان لهذه المعادلة حلا من الشكل :

$$u = \int_C e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \int_C e^{z\zeta} \zeta^{p-1} (\zeta + \beta)^{q-1}\, d\zeta \quad (8)$$

بفرض أن :

$$p = \frac{b_2}{\beta} \quad , \quad q = a_1 - p \tag{9}$$

وأما الطريق C فنختاره بحيث يكون :

$$\left[e^{z\zeta} \zeta^{p} (\zeta + \beta)^{q} \right]_{C} = 0$$

فاذا فرضنا أن z حقيقية موجبة فانه يمكن اختيار C احـــد المحيطين كما في الشكل :





سنفرض فيما يلي أن $\arg \zeta = 0$ عندما $\zeta > 0$ وأن $\arg(\zeta+\beta) = 0$ عندمـا $\zeta + \beta > 0$. لننشر $(\zeta+\beta)^{q-1}$ فنجد بفرض أن $|\beta| > |\zeta|$:

$$(\zeta+\beta)^{q-1} = \beta^{q-1}\left(1 + \frac{\zeta}{\beta}\right)^{q-1} = \beta^{q-1}\left[1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(q-1)(q-2)\ldots(q-k)}{k!\,\beta^{k}} \zeta^{k}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^{k} \tag{10}$$

حيث رمزنا :

$$c_k = \beta^{q-k-1} \frac{(q-1)(q-2)\ldots(q-k)}{k!} \quad k \geqslant 1 \tag{10'}$$

$$c_0 = \beta^{q-1}$$

وإذا كان $|\zeta| \geqslant |\beta|$ فإننا نكتب :

$$(\zeta+\beta)^{q-1} = c_0 + c_1 \zeta + \dots + c_n \zeta^n + R_n(\zeta) \qquad (11)$$

وإذا استخدمنا المحيط C_1 فإننا نجد الحل :

$$u_1 = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p+k-1} d\zeta + \int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta$$

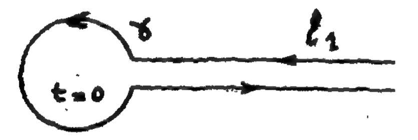
لنأخذ في المجموع الواقع في الطرف الأيمن متحولاً جديداً t :

$$z\zeta = -t = e^{-\pi i} t$$

فنجد :

$$\int_{C_1} e^{z\zeta} \zeta^{p+k-1} d\zeta = e^{-\pi p i} (-1)^k z^{-p-k} \int_{l_1} e^{-t} t^{p+k-1} dt$$

حيث يكون l_1 كما في الشكل ، وباجراء المكاملة على l_1 :



$$\int_{l_1} e^{-t} t^{p+k-1} dt = \int_{\infty}^{\delta} e^{-t} t^{p+k-1} dt + \int_{\gamma} e^{-t} t^{p+k-1} dt$$

$$+ \int_{\delta}^{\infty} e^{-t} t^{p+k-1} e^{2\pi i(p+k-1)} dt$$

واستناداً إلى تمثيل الدالة Γ التكاملي ، فإننا نجد عندما نجعل δ ، نصف قطر γ ، يسعى إلى الصفر ·

$$\int_{l_1} e^{-t}\, t^{p+k-1}\, dt = (e^{2\pi i(p+k)} - 1)\,\Gamma(p+k)$$

وهكذا نجد :

$$u_1(z) = z^{-p}(e^{2\pi ip} - 1)\, e^{-\pi pi} \sum_{0}^{n} (-1)^k c_k \Gamma(p+k)\, z^{-k}$$

$$+ \int_{C_1} e^{z\zeta}\, \zeta^{p-1} R_n(\zeta)\, d\zeta$$

أو :

$$z^p u_1 = e^{-\pi pi}(e^{2\pi pi} - 1) \sum_{0}^{n} (-1)^k c_k\, \Gamma(p+k)\, z^{-k}$$

(12)

$$+ z^p \int_{C_1} e^{z\zeta}\, \zeta^{p-1} R_n(\zeta)\, d\zeta$$

سنثبت فيما يلي أن المتسلسلة :

$$e^{-\pi pi}(e^{2\pi pi} - 1) \sum_{0}^{\infty} (-1)^k c_k\, \Gamma(p+k)\, z^{-k} \qquad (13)$$

تمثل نشراً مقارباً لـ $z^p u_1$ عندما $z > 0$. يكفي لذلك أن نثبت أن

$$\lim_{z \to \infty} z^{n+p} \int_{C_1} e^{z\zeta}\, \zeta^{p-1} R_n(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad (14)$$

نختار C_1 كما في الشكل ، ونثبت أولاً أن :

$$\lim_{z \to \infty} z^{n+p} \int_{-\infty}^{-r} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta = 0 \qquad (15)$$

نلاحظ لذلك اعتماداً على (11) أنه يمكن اختيار عدد موجب N كبير بقدر كاف بحيث يسعى $\left| \frac{R_n(\zeta)}{\zeta^N} \right|$ إلى الصفر عندما $\zeta \to -\infty$ ، وبالتالي فإن $\left| \frac{R_n(\zeta)}{\zeta^N} \right|$ يبقى محدوداً على C_1 ، وبالتالي فهناك عدد موجب m بحيث يكون :

$$| R_n(\zeta) | < m | \zeta |^N \qquad (-\infty < \zeta \leqslant -r)$$

وعلى هذا نستطيع أن نكتب :

$$| \zeta^{p-1} R_n(\zeta) | < m' e^{-\epsilon \zeta}$$

بفرض أن m' ثابت موجب وأن ϵ عدد موجب نختاره صغيراً بالقدر الذي نشاء ، وهكذا نجد :

$$| z^{n+p} \int_{-\infty}^{-r} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta | < | z^{n+p} | \int_{-\infty}^{-r} m' e^{(z-\epsilon)\zeta} d\zeta$$

$$= \frac{| z^{n+p} |}{z - \epsilon} m' e^{-(z-\epsilon)r}$$

ومنه ينتج صحة (15) . وبالاسلوب نفسه نرى ان الأمر ذاته يصح لأجل التكامل على الحافة السفلى من الشريط . بقي ان نثبت أن :

$$\lim_{z \to \infty} z^{n+r} \int_{\gamma} e^{z\zeta} \zeta^{p-1} R_n(\zeta) d\zeta = 0$$

سنعتبر $r < \frac{1}{2} | \beta |$ عندئذ يمكننا أن نستعمل (10) على محيط γ ، ويكون استناداً إلى صيغة كوشي التكاملية :

$$|c_k| < \frac{m''}{(\frac{1}{2}|\beta|)^k}$$

بفرض أن m'' ثابت موجب . ولما كان :

$$R_n(\zeta) = c_{n+1}\zeta^{n+1} + c_{n+2}\zeta^{n+2} + \dots$$

فاننا نجد على γ :

$$|R_n(\zeta)| \leqslant |c_{n+1}||\zeta|^{n+1} + |c_{n+2}||\zeta|^{n+2} + \dots < \frac{m''|\zeta|^{n+1}}{[\frac{1}{2}|\beta|]^{n+1}(1-\rho)}$$

بفرض أن :

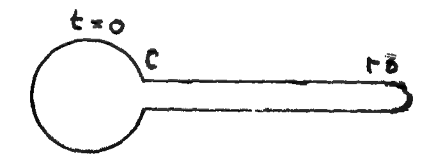
$$\rho = \frac{r}{\frac{1}{2}(\beta)}$$

وإذا ادخلنا متحولاً جديداً t بدلاً من ζ وفق الدستور $\gamma - = \zeta z$ فنجد :

$$z^{n+p}\int_{\gamma} e^{z\zeta}\zeta^{p-1}R_n(\zeta)d\zeta = (-1)^p z^n \int_{\gamma'} e^{-t}t^{p-1}R_n(-\frac{t}{z})\,dt$$

حيث γ' محيط دائري مركزه $t = 0$ ونصف قطره rz .

يمكننا الآن أن نستبدل بـ γ' محيطاً γ'' وفق الشكل بفرض أن c عدد موجب مثبت مستقل عن z . نفرض أولاً أن p عدد حقيقي فيكون :



$$\left|(-1)^p z^n \int_{\gamma''} e^{-t}t^{p-1}R_n(-\frac{t}{z})dt\right| < \frac{1}{z}\frac{m''}{[\frac{1}{2}|\beta|]^{n+1}(1-\rho)}\int_{\gamma''}|\,|t|^{n+p}e^{-t}\,|ds$$

بفرض أن S قوس γ'' . ان الطرف الأيمن يتكون من جداء $\frac{1}{z}$ بمضروب يبقى محدوداً على الدائرة التي مركزها $t = 0$ ونصف قطرها c . أما التكامل على القطعة (c,rz) فيعطي هذا المضروب الشكل :

$$\frac{m''}{[\frac{1}{2}|\beta|]^{n+1}(1-\rho)}\int_{c}^{rz} e^{-t}t^{n+p}\,dt$$

فإذا ماجعلنا $z\to\infty$ نرى أن هذا المقدار يسعى إلى نهاية محدودة . وبذلك نصل إلى المطلوب . اما إذا كان p من الشكل $p=p_1+i\,p_2$ فيمكن إعادة الحسابات والوصول إلى النتيجة ذاتها بملاحظة أن

$$t^p = e^{(p_1+ip_2)\lg t} \qquad |t^p| = |t|^{p_1} e^{-p_2 \lg t}$$

وهكذا نرى أن :

$$u_1(z) \sim z^{-p} e^{-\pi p i}\left(e^{2\pi p i}-1\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(p+k)c_k}{z^k} \qquad (16)$$

ونحصل بشكل مماثل على النشر المقارب للحل الثاني انطلاقاً من التمثيل التكاملي للحل على المحيط C_2 .

لنلاحظ أننا إذا رمزنا لأمثال المتسلسلة في (16) ولاحظنا (10') . فإننا نجد :

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = -\frac{\Gamma(p+k+1)c_{k+1}}{\Gamma(p+k)c_k} = \frac{-(p+k)(q-k-1)}{\beta(k+1)}$$

أو :

$$(k+1-q)(k+p)A_k = (k+1)\beta A_{k+1} \qquad (17)$$

ولكننا اذا عدنا إلى (7) وأجرينا فيها التحويل :

$$u = z^{-p} v$$

فإننا نجد :

$$v'' + \left(\beta + \frac{a_1 - 2p}{z} \right) v' + \frac{p(p+1) - a_1 p}{z^2} v = 0 \qquad (18)$$

وإذا عوضنا في هذه المعادلة :

$$v = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_k}{z^k} + \dots \qquad (19)$$

فإننا نجد :

$$(k(k+1) - k(a_1 - 2p) + p(p+1) - a_1 p) A_k = (k+1) \beta A_{k+1}$$

واذا لاحظنا أن $q = a_1 - p$ فإن العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل :

$$(k+1-q)(k+p) A_k = (k+1) \beta A_{k+1}$$

وهذه لاتختلف عن (17) ، وبالتالي فإننا نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

للحصول على النشر المقارب لمعادلة لابلاس (3) نقوم بالخطوات التالية :

(١) نقوم بالتحويل $w = e^{\alpha z} u$ ونختار α بحيث ينعدم الحد الذي يحوي z في أمثال u فتتحول بذلك المعادلة (3) الى المعادلة (6) .

٢ – نقوم بالتحويل $u = z^{\lambda} v$ ونختار λ بحيث تـأخذ المعادلة التفاضلية في v الشكل (18) .

٣ – نعوض في المعادلة الناتجة النشر (19) فتتعين امثال هذا النشر بالدستور التدريجي (17) ويكون النشر المقارب للحل هو :

$$w_1(z) \sim e^{\alpha z} z^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z^k}$$

(٦ - ٢ - ١) **مثال** : لتكن لدينا المعادلة :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - n^2) w = 0 \qquad (20)$$

والمطلوب الحصول على نشر مقارب لحلول هذه المعادلة .

ان هذه المعادلة ليست من شكل معادلة لابلاس (3) ولكن إذا أجرينا التحويل $w = z^n u$ تتحول المعادلة (20) إلى الشكل :

$$z u'' + (2n+1) u' + z u = 0$$

ولهذه المعادلة شكل معادلة (3) . نجري التحويل $u = e^{\alpha z} v$ فنجد :

$$z v'' + [(2n+1) + 2\alpha z] v' + [(\alpha^2+1) z + \alpha (2n+1)] v = 0$$

نختار α بحيث ينعدم α^2+1 فنجد $\alpha_1 = i$ و $\alpha_2 = -i$. لتكن $\alpha = i$ فتأخذ المعادلة الأخيرة الشكل :

$$z v'' + [(2n+1) + 2iz] v' + i(2n+1) v = 0$$

نجري الآن التحويل $v = z^{\lambda} u_1$ فنجد :

$$v_1'' + \left(\frac{2\lambda+2n+1}{z} + 2i\right) v_1' + \left[\frac{2i\lambda+i(2n+1)}{z} + \frac{\lambda(\lambda-1)+(2n+1)\lambda}{z^2}\right) v_1 = 0$$

نختار λ بحيث ينعدم $2i\lambda+i(2n+1)$ أي $\lambda = -\frac{2n+1}{2}$ فتأخذ المعادلة الأخيرة الشكل :

$$v_1'' + 2i v_1' + \frac{1-4n^2}{4z^2} v_1 = 0$$

نعوض في هذه المعادلة النشر :

$$v_1 = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

فنجد بعد المطابقة :

$$A_1 = \frac{1-4n^2}{8i} A_0 \qquad [k(k+1) + \frac{1-4n^2}{4}]A_k = 2i(k+1)A_{k+1} \quad k=1,2,\dots$$

ومنه نجد :

$$v_1 = A_0[1 + \frac{1^2-4n^2}{8iz} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)}{2!(8iz)^2} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)}{3!(8iz)^3} + \dots]$$

ويكون النشر المطلوب للحل الاول للمعادلة (20) هو :

وبالأسلوب ذاته نحصل على نشر الحل الثاني

$$w_1 = e^{iz} z^{-\frac{2n+1}{2}} v_1$$

تمارين

أوجد النشر المقارب لحلول المعادلات التالية :

١ - $z w'' + w' - 4zw = 0$

٢ - $z w'' + (p + q + z)w' + pw = 0$

٣ - $zw'' + (2 + az)w' + (a + bz)w = 0$

٤ - $z w'' + 2aw' - zw = 0$

٧ - معادلة بسل التفاضلية

تسمى المعادلة (20) التي مرت معنا في (٦ - ٢ - ١) ، وهي :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0 \qquad (1)$$

بفرض أن ν ثابت ، معادلة بسل التفاضلية . ولهذه المعادلة أهمية كبيرة في الفيزياء، فهي تبرز مثلا عند تعيين حلول معادلة لابلاس موافقة لشروط حدية معينة . فإذا استخدمنا الاحداثيات الاسطوانية (ρ , φ , Z) تأخـــذ معادلة لابلاس $\Delta V = 0$ الشكل :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0$$

ولهذه المعادلة حل من الشكل :

$$V = e^{kZ} w(\rho) \cos(\nu\varphi + \epsilon)$$

بفرض أن k, ν, ϵ ثوابت ، فيما إذا حققت w المعادلة :

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) w = 0$$

وهذه تنقلب إلى المعادلة (1) اذا اجرينا التحويل $z = k\rho$.

٧ـ ١ توابع بسل : لمعادلة بسل نقطتان شاذتان $z = 0$ وهي نقطـــه شاذة منتظمة و $z = \infty$ وهي نقطة شاذة غير منتظمة . سنهتم فيما يلي في الوصول إلى الحلول بجوار $z = 0$. ان جذري المعادلة الدليلية هما $\mp \nu$. وإذا لم يكن ν عدداً صحيحاً سالباً فإن :

$$w = c_0 z^\nu \left[1 - \frac{(\frac{1}{2} z)^2}{1.(\nu+1)} + \frac{(\frac{1}{2} z)^4}{1.2.(\nu+1)(\nu+2)} - \dots\right]$$

هو حل لمعادلة بسل . يسمى هذا الحل ، فيما إذا اخترنا $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ ، دالة بسل من المرتبة ν ويرمز لها بـ $J_\nu(z)$ ، أي :

$$J_\nu(z) = \left(\tfrac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{2r}}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)} \qquad (2)$$

على أن نأخذ الفرع الرئيسي للدالة متعددة الفروع $\left(\tfrac{1}{2}z\right)^\nu$. إن المتسلسلة الواردة في (2) متقاربة مهما كانت z .

ان الحلين $J_\nu(z)$ و $J_{-\nu}(z)$ مستقلان خطياً ، اذا لم تكن ν عدداً صحيحاً أو صفراً ، وبالتالي فإن الحل العام لمعادلة بسل هو :

$$w = A\,J_\nu(z) + B\,J_{-\nu}(z) \qquad (3)$$

أما إذا كان ν عدداً صحيحاً n فعندئذ يكون :

$$J_{-n}(z) = \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{2r}}{r!\,\Gamma(-n+r+1)}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{-n} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{2r}}{r!\,\Gamma(-n+r+1)}$$

(لأن $\frac{1}{\Gamma(t)}$ ينعدم عندما يكون t عدداً صحيحاً سالباً أو صفراً).

$$= \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{2s}}{\Gamma(n+s+1)\,s!} = (-1)^n J_n(z)$$

وعلى هذا فإن (3) لاتعطينا حلا عاماً عندما يكون ν عدداً صحيحاً أو معدوماً. وايجاد الحل العام يتطلب ماسبق أن ذكرناه في البند الثاني من هذا الفصل .

٧ ـ ٢ الصيغ التكرارية :

نلاحظ أولاً أن :

$$J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=(\tfrac{1}{2}z)^{\nu-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}z^2)^r}{r!\,\Gamma(\nu+r)}+(\tfrac{1}{2}z)^{\nu+1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}z^2)^r}{r!\,\Gamma(\nu+r+2)}=$$

$$=(\tfrac{1}{2}z)^{\nu-1}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}z^2)^r}{r!\,\Gamma(\nu+r)}-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}z^2)^{r+1}}{r!\,\Gamma(\nu+r+2)}\right]$$

$$=(\tfrac{1}{2}z)^{\nu-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu)}+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{r!\,\Gamma(\nu+r)}-\frac{1}{(r-1)!\,\Gamma(\nu+r+1)}\right\}(-\tfrac{1}{4}z^2)^r\right]$$

$$=\nu(\tfrac{1}{2}z)^{\nu-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}z^2)^r}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}=\frac{2\nu}{z}J_\nu(z)$$

وما قمنا به من تغيير ترتيب الحدود في المتسلسلتين غـــير المنتهيتين صحيح بسبب التقارب المطلق .

وهكذا نرى أن :

$$J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}J_\nu(z) \qquad (4)$$

وباسلوب مماثل نجد :

$$J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)=$$

$$=(\tfrac{1}{2}z)^{\nu-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu)}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!\,\Gamma(\nu+r)}+\frac{1}{(r-1)!\,\Gamma(\nu+r+1)}\right\}(-\frac{z^2}{4})^r\Big]=$$

$$=(\tfrac{1}{2}z)^{\nu-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\nu+2r}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}(-\frac{z^2}{4})^r$$

أي :

$$J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)=2J'_\nu(z) \qquad (5)$$

ومن (4) و (5) نجد بسهولة :

$$\frac{\nu}{z} J_\nu (z) + J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) \qquad (6)$$

$$\frac{\nu}{z} J_\nu (z) - J_\nu'(z) = J_{\nu+1}(z) \qquad (7)$$

تمارين

١ — بين أن رونسكي $J_\nu(z)$ و $J_{-\nu}(z)$ هو :

$$\Delta (J_\nu , J_{-\nu}) = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z}$$

واستنتج من ذلك أن $J_\nu , J_{-\nu}$ مستقلان خطياً عندما لايكون ν عدداً صحيحاً أو صفراً .

٢ — اثبت بالاستقراء الرياضي أنه إذا كان m عدداً صحيحاً فإن :

$$(\tfrac{1}{2} z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+2n)(m+n-1)!}{n!} J_{m+2n}(z)$$

٣ — بين أنه إذا كان m صحيحاً موجباً فإن :

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^\nu J_\nu (z)] = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z)$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^{-\nu} J_\nu(z)] = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z)$$

٤ — اثبت أن :

$$J_\nu(z) J_{1-\nu}(z) + J_{-\nu}(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z}$$

٥ — أثبت أن :

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z$$

واستنتج من ذلك $J_{\pm \frac{3}{2}}(z)$

٦ – برهن أن :

$$[J_0(z)]^2 + 2 \sum_{1}^{\infty} [J_n(z)]^2 = 1$$



الفصل الثالث

النظرية الوصفية للمعادلات التفاضلية غير الخطية

١ ـ مقدمة : إن معظم الأبحاث التي قدمناها لك في المعادلات التفاضلية حتى الآن تتعلق بطرق حل هذه المعادلات ونظريات وجود الحل . ولقـــد لاحظت كيف كان بالامكان الوصول إلى حل بشكل منته في بعض اصناف المعادلات من المرتبة الأولى وفي المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة من مراتب مختلفة ، ولاحظت أيضاً كيف أننا كنا نلجأ إلى الحل بوساطة المتسلسلات عندما كان يصعب أو يتعذر علينا الوصول إلى الحل بوساطة دوال ابتدائية شهيرة .

غير أنه يمكن الاجابة عن عديد من الأسئلة حول حلول المعادلات التفاضلية دون اللجوء إلى حل هذه المعادلات .

سنكتفي في هذا الفصل بدراسة بسيطة لهـــذا النمط من الأسئلة ، في حالة مجموعة مكونة من معادلتين تفاضليتين من المرتبة الأولى .

٢ ـ مستوي الطور والنقط الحرجة :

لنبدأ بالنظر في مسألة القيم الابتدائية :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(x , \frac{dx}{dt} \right) \qquad (1)$$

$$x = x_0 , \frac{dx}{dt} = x'_0 \quad \text{عندما} \quad t = 0$$

بفرض أن للدالة f مشتقات جزئية مستمرة من المرتبـــة الاولى بالنسبة لـ x و x' .

يمكن ، إذا وضعنا $dx/dt = y$ نقل هذه المعادلة مع شروطها الابتدائيـة ، إلى المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \frac{dy}{dt} = f(x,y)$$

(2)

$$x = x_0 \qquad y = y_0 = (x'_0) \quad \text{عندما} \quad t = 0$$

ومن المعلوم أن حل هذه المجموعة يعني الحصول على زوج من الدوال المفضولة $x = x(t)$, $y = y(t)$ يحول المعادلات (2) ، في فـــترة تحوي $t = 0$ ، إلى متطابقتين ، ويحقق بالاضافة لذلك $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

يمكن النظر إلى الدالتين $x = x(t)$, $y = y(t)$ على أنهما تمثيل وسيطي لمنحن في المستوي xy يمر بالنقطـــة (x_0 , y_0) . نسمي المستوي xy مستوي الطور للمعادلة (1) أو للمجموعة (2) ، ونسمي المنحني المعطى بالتمثيل الوسيطي مساراً أو مداراً لـ (1) أو لـ (2) . وبفرض وجود تقابل متباين بـين قيم الوسيط t ونقط المنحني ، فإننا نسمي الاتجاه على المنحني الموافق للتزايد t الاتجاه الموجب .

وإذا كانت القيمتان $x = x_0$ و $y = y_0 (= x'_0)$ موافقتين لـ $t = t_0$ بـدلاً من $t = 0$ فإننا نحصل على حل مختلف دون أن يتغير المسار ، وذلـك لأن المعادلتين :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \qquad \alpha < t < \beta$$

تعرفان المنحني ذاته المعين بالمعادلتين :

$$x = x(t - t_0) \qquad y = y(t - t_0) \qquad \alpha + t_0 < t < \beta + t_0$$

وعلى هذا فإن المصطلحين « حل » و« مسار » ليسا مترادفين .

وإذ حذفنا الوسيط t من المعادلتين $x = x(t) , y = y(t)$ فإننا نحصل على معادلة ديكارتية لمنحن يحمل المسار . بعبارة اخرى ان المسار هو هذا المنحني أو هو جزء منه . فإذا حذفنا على سبيل المثال الوسيط t من المعادلتين :

$$x = e^t \qquad y = e^{2t} \qquad -\infty < t < \infty \tag{3}$$

فإننا نحصل على $y = x^2$. وهذه معادلة قطع مكافىء . إن النصف الأيمن من هذا القطع هو المسار .

يمكن أيضاً الوصول إلى معادلة حامل المسار الذي يمر بـ (x_0, y_0) بحذف t من (2) بتقسيم المعادلة الثانية على الأولى فنحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$x = x_0 \quad \text{عندما} \quad y = y_0$$

ثم بحل هذه المعادلة

يمكن تعميم ماقلناه على حالة مجموعة من الشكل :

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y) \qquad \frac{dy}{dt} = f(x, y) \tag{4}$$

$$t = 0 \quad \text{عندما} \quad x = x_0 , y = y_0$$

بفرض أن لكل من f و g مشتقات جزئية مستمرة من المرتبة الأولى .

مثال ١ ـ لنحاول ايجاد مسارات المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y \qquad \frac{dy}{dt} = x + 3y \tag{5}$$

لنبحث أولاً عن الحلول بالشكل :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{mt}$$

فنجد بالتعويض في (5) بعد الاختصار على e^{mt} :

$$(m-3)A - B = 0 \qquad -A + (m-3)B = 0$$

وعلى هذا فإن علينا أن نأخذ $m=2$ أو $m=4$ للوصول إلى حل غير الحل الصفري . فإذا أخذنا $m=2$ فإننا نجد $A=-B$ ويكون الحل :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

أما إذا أخذنا $m=4$ فإننا نجد $A=B$ ويكون الحل :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

ويكون الحل العام :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

فمسار المجموعة يتعين وسيطياً بالمعادلتين :

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$$
$$y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \qquad -\infty < t < \infty \qquad (6)$$

وبحذف الوسيط من هاتين المعادلتين نجد :

$$(x - y)^2 = k(x + y) \qquad k = 2c_1^2/c_2 \qquad (7)$$

فإذا اخترنا $k = 0$ نجد المستقيم $y = x$ الموافق لـ $c_1 = 0$. أمـــا المستقيم $y = -x$ الموافق لـ $c_2 = 0$ فلا نحصل عليه من المعادلة الديكارتية الاخـيرة ما لم نسمح لـ k أن يصبح لانهائياً .

يمكن حل المجموعة المفروضة بطريقة اخرى .نقسم المعادلة الثانية على الاولى فنجد :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{3x + y}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من المرتبة الاولى يمكن حلها بسهولة باجراء التحويل $y = ux$.

ان المعادلة (7) تعرف جماعة من القطوع المكافئة تمس ، باستثناء واحد منها ، المستقيم $x+y = 0$ وتشترك بالمحور $x - y = 0$. الاستثناء الوحيد هو القطع المتردي $x - y = 0$ الموافق لـ $k = 0$.

ان هذه المنحنيات التي حصلنا عليها هي ليست مسارات المجموعة المفروضة بل حوامل هذه المسارات . فإذا فرضنا ، مثلاً ، $x = -1$ و $y = 2$ عندما $t = 0$ فاننا نجد بالتعويض في (6) .

$$c_1 + c_2 = -1 \qquad -c_1 + c_2 = 2$$

وعلى هذا فإن :

$$x = -\frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$y = \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$

والمسار الموافق لهاتين المعادلتين هو نصف القطع المكافىء الذي ينطلق من نقطة الاصل (دون أن تكون هذه النقطة من المسار) ماراً بالنقطة (—1,2). ولما كانت c_1 تظهر في (7) على شكل c_1^2 فإن النصف الاخير من القطع المكافىء $(x-y)^2 = 9(x+y)$ هو المسار :

$$x = \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$

$$y = -\frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$

وبوجه عام ان كل قطع مكافىء من الجماعة (7) ، بعد أن نحذف منه نقطة الاصل ، هو اتحاد مسارين . والامر نفسه يصح بالنسبة للمستقيمين $y = \pm x$.

وبوجه عام ان المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

التي نحصل عليها من (4) بتقسيم المعادلة الثانية على الاولى تعطينا ميل المسار عند النقطة (x,y) . ولكن إذا انعدم كل من البسط والمقام في النقطة (x_0,y_0) فإننا نسمي هـذه النقطة **نقطة حرجة** أو **نقطة توازن** للمجموعة (4) . وتوصف النقطة الحرجة بانها منعزلة إذا وجد قرص دائري يحويها دون أن يحوي أيـة نقطة حرجة أخرى .

٣ ــ النقط الحرجة ومسارات مجموعة خطية : سنعالج في هذا البند الاشكال المختلفة لمسارات المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + ey \qquad (1)$$

بفرض أن $a,b,c\ e$ ثوابت حقيقية وأن $ae - bc \neq 0$

أو للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + ey}{ax + by} \qquad (1')$$

في جوار النقطة الحرجة $(0,0)$. ولقد وضعنا الشرط $ae - bc \neq 0$ كي تكون النقطة $(0,0)$ نقطة حرجة منعزلة ، إذ لو كان $ae - bc = 0$ لكانت جميع نقط المستقيم $cx + ey = 0$ نقطاً حرجة .

ولحل المجموعة (1) نضع $x = Ae^{mt}, y = Be^{mt}$ فنجد معادلة القيم المميزة .

$$\begin{vmatrix} m - a & -b \\ -c & m - e \end{vmatrix} = m^2 - (a+e)\,m + ae - bc = 0 \qquad (2)$$

ان طبيعة حلول المجموعة (1) ترتبط بطبيعة حلول المعادلة (2) . ولذلك علينا أن نميز بين حالات مختلفة حسب قيمة المميز للمعادلة التربيعية (2) في m وقبل البدء بذلك نورد بعض التعاريف .

تعاريف : نقول عن مسار T معرف بالمعادلتين $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ انه مقارب للنقطة الحرجة $(0,0)$ عندما $t \to +\infty$ إذا كان .

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

وانه مقارب للنقطة الحرجة $(0,0)$ عندما $t \to -\infty$ إذا كان :

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$$

ونقول عن المسار T انه يلحق بالنقطة الحرجة $(0,0)$ عندما $t \to \infty$ إذا كان T مقارباً لـ $(0,0)$ عندما $t \to +\infty$ وكانت النهاية .

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y(t)}{x(t)}$$

موجودة أو كانت مساوية $\pm\infty$. وبشكل مماثل نتحدث عن الحالة التي يلحق فيها T النقطة الحرجة $(0,0)$ عندما $t \to -\infty$.

ونقول عن T انه يبتعد إلى اللانهاية عن النقطة الحرجة $(0,0)$ عندما $t \to +\infty$ (أو $t \to -\infty$) فيما إذا سعت احدى الدالتين $x(t)$ أو $y(t)$ إلى اللانهاية عندما $t \to +\infty$ (أو $t \to -\infty$) .

الحالة (١) : لنعالج أولاً المجموعة

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \qquad \frac{dy}{dt} = 2\lambda y \qquad \lambda \neq 0 \qquad (3)$$

إن جذري المعادلة المميزة هما λ و 2λ فهما غير متساويتين ومن إشارة واحدة. وان حل المعادلة $(1')$ المقابلة لهذه المجموعة هو :

$$y = k x^2 \qquad (4)$$

وهذه معادلة جماعة من القطوع المكافئة يمس كل منها المستقيم $y = 0$ في النقطة الحرجة $(0,0)$ أما اذا قمنا بحل (3) فاننا نجد :

$$x = Ae^{\lambda t} \qquad y = Be^{2\lambda t} \tag{5}$$

ويتضح من (5) أن كل مسار يبتعد إلى اللانهاية عن النقطة الحرجة عندما $t \to \infty$ إذا كان $\lambda > 0$ ، وتقترب من النقطة الحرجة في اتجاه محدد عندما $\lambda < 0$.

تسمى النقطة الحرجة في مثل هذه الحالة عقدة . وتتميز العقدة بوجود جوار النقطة الحرجة بحيث جميع المسارات ، في هذا الجوار ، تلحق بالنقطة الحرجة عندما $t \to +\infty$ أو $t \to -\infty$.

الحالة (٢) : أما بالنسبة للمجموعة .

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \qquad \frac{dy}{dt} = -\lambda y \qquad \lambda \neq 0 \tag{6}$$

في هذه الحالة تكون المعادلات الوسيطية للمسارات :

$$x = Ae^{\lambda t} \qquad y = Be^{-\lambda t} \tag{7}$$

ومنها نرى أنه ، سواء كانت λ موجبة أو سالبة فإن كل قطع زائد (7) يبتعد عن النقطة الحرجة إلى اللانهاية عندما $t \to +\infty$ أو $t \to -\infty$. غير أن المسار المحمول على المستقيم $x = 0$ يلحق عندما $t \to \infty$ بالنقطة الحرجة إذا كان $\lambda < 0$ ويبتعد عن النقطة الحرجة إلى اللانهاية إذا كان $\lambda > 0$. أما المسار المحمول على المستقيم $y = 0$ فهو يبتعد عندما $t \to \infty$ عن النقطة الحرجة إلى اللانهاية إذا كان $\lambda > 0$ ويلحق بالنقطة الحرجة إذا كان $\lambda < 0$. تسمى النقطة الحرجة في مثل هذه الحالة نقطة سرجية . وتتميز النقطة السرجية في أن مسارين (على الأقل) من المسارات يلحقان بالنقطة السرجية من جهتين متعاكستين عندما $t \to +\infty$ ، ومسارين (على الأقل) يلحقان بالنقطة السرجية من الجهتين المعاكستين عندما

$t \to -\infty$. أما بقية المسارات الأخرى فتبتعد عن النقط الحرجة إلى اللانهاية عندما $t \to +\infty$ أو $t \to -\infty$.

الحالة (٣) : وفي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + \lambda y \qquad \lambda \neq 0 \qquad (8)$$

ان جذري المعادلة المميزة حقيقيان ومتساويان . وتكون المعادلتان الوسيطيتان لمسارهما :

$$x = Ae^{\lambda t}$$

$$y = Be^{\lambda t} + A\lambda te^{\lambda t} \qquad (9)$$

فإذا كان $0 < \lambda$ فإن كل مسار يبتعد عن النقطة الحرجة إلى مالانهاية عندما $t \to +\infty$ ، أما إذا كان $0 > \lambda$ فإن كل مسار يلحق بالنقطة الحرجة عندما $t \to +\infty$. وهكذا نرى أن النقطة الحرجة في هذه الحالة عقدة .

الحالة (٤) : وفي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda y \qquad (10)$$

وهنا يكون أيضاً للمعادلة المميزة جذر مضاعف ، وتكون المعادلات الوسيطيتان لمسارهما :

$$x = Ae^{\lambda t} \qquad y = Be^{\lambda t} \qquad (11)$$

وهنا نلاحظ انه إذا كان $0 < \lambda$ فإن كل مسار يبتعد عن النقطة الحرجة إلى

مالانهاية عندما $t \to +\infty$ ويلحق بها إذا كان $\lambda > 0$. ان النقطة الحرجة في هذه الحالة هي عقدة ، ولكنها تختلف عن الحالتين الأولى والثالثة في أنه لايوجد للمنحنيات مماس مشترك عند النقطة الحرجة . تسمى كل عقدة من هذا النمط عقدة من النوع الأول في حين تسمى كل عقدة من النمط الذي رأيناه في الحالتين الأولى والثالثة عقدة من النوع الثاني .

الحالة (٥) : وهي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda y \qquad \frac{dy}{dt} = -\lambda x \qquad \lambda \neq 0 \tag{12}$$

إن جذري المعادلة المميزة هي $\pm i\lambda$ وإن المعادلتين الوسيطيتين للمسار

$$\begin{aligned} x &= A \cos \lambda t + B \sin \lambda t \\ y &= -A \sin \lambda t + B \cos \lambda t \end{aligned} \tag{13}$$

وحوامل المسارات هي الدوائر $x^2+y^2 = r^2$. وإذا جعلنا $t \to \infty$ فإن المسارات تدور باتجاه عقارب الساعة عندما $\lambda > 0$ وفي الاتجاه المخالف عندما $\lambda < 0$.

تسمى النقطة الحرجة في مثل هذه الحالة مركزاً . ويتميز المركز بوجود جوار للنقطة الحرجة يحوي مجموعة لانهائية من المسارات المغلقة تقع النقطة الحرجة داخل كل منها ، كما أنه مهما كان $\epsilon > 0$ فإنه يوجد مسارات في هذا الجوار بحيث يكون طول أعظم اوتارها طولاً أقل من ϵ .

الحالة (٦) : وهي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y \qquad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y \qquad \lambda \neq 0 \tag{14}$$

إن جذري المعادلة المميزة هما $\lambda \pm i$ وإن المعادلتين الوسيطيتين للمسار هما :

$$x = e^{\lambda t}(A \cos t + B \sin t)$$

$$(15)$$

$$y = e^{\lambda t}(A \sin t + B \cos t)$$

فإذا كان $0 < \lambda$ فإن كل مسار يبتعد عن النقطة الحرجة إلى مالانهاية عندما $t \to +\infty$ ، أما إذا كان $\lambda < 0$ فإن كل مسار يتقارب من النقطة الحرجة عندما $t \to +\infty$. تسمى النقطة الحرجة في مثل هذه الحالة نقطة حلزونية أو نقطة بؤرية . وتتميز هذه النقطة بوجود جوار لها بحيث يتقارب كل مسار في هذا الجوار من النقطة الحرجة عندما $t \to +\infty$ أو $t \to -\infty$ ، وان كل مسار يتقارب من النقطة الحرجة يدور حولها عدداً غير منته من المرات .

وإذا فحصنا جماعات المسارات التي تحدثنا عنها في الحالات المختلفة يتبين لنا أن الحلول الدورية لاتبرز إلا في حالة الدوران حول مركز . لأنه في هذه الحالة فقط يحتوي المسار على نقطة (x_0, y_0) يعود لها في كل دورة ، واستنادا إلى نظرية الوجود الوحدانية ، يعيد المسلك الذي انطلق منه عند هذه النقطة .

أما مسألة الاستقرار التي سنعالجها الآن فلا يمكن الإجابة عنها بفحص جماعات المسارات لأن هذه المسارات ، باستثناء حالة النقطة السرجية ، اما أن تتقارب من النقطة الحرجة أو تبتعد عنها عندما تسعى t إلى مالانهاية ، الأمر الذي يتوقف على جذور المعادلة المميزة .

ومما يساعدنا في مناقشة الاستقرار هو التمييز بين نقطة حرجة مستقرة ونقطة

حرجة مستقرة مقاربة وللوصول إلى ذلك لتكن $C(x_0, y_0)$ نقطة حرجة منعزلة للمجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y)$$

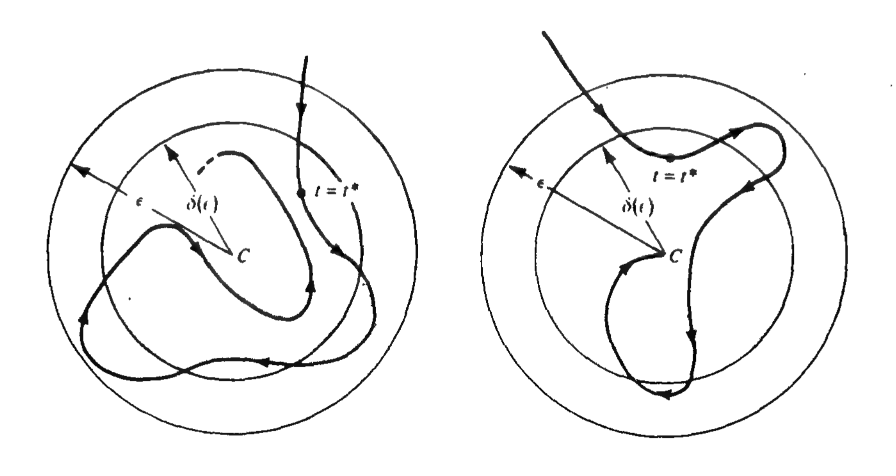
وليكن Γ مساراً كيفياً المجموعة تمثيله الوسيطي $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$

وليكن :

$$D(t) = \sqrt{[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2}$$

بعد نقطة كيفية من Γ عن النقطة الحرجة .

نقول عن النقطة الحرجة C أنها مستقرة إذا كان هناك ، لأجل كل عدد موجب مفروض ϵ ، عدد موجب δ بحيث إذا حوى أي مسار نقطة $[x(t^*), y(t^*)]$ بعدها $D(t^*)$ أصغر تماماً من δ فإن البعد $D(t)$ موجود وهو أقل من ϵ لاجل جميع $t \geqslant t^*$ انظر الشكل .



مسار مستقر مسار مستقر مقارب

ونقول عن نقطة حرجة منعزلة C إنها مستقرة مقاربة إذا كانت مستقرة من جهة وإذا وجد عدد موجب δ^* بحيث إذا كان $D(t^*) < \delta^*$ فإن :

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_0 \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$$

ونقول عن كل نقطة حرجة ليست مستقرة انها غير مستقرة أو قلقة .

سنعالج مسألة الاستقرار بشكل أكثر تفصيلاً في الفصل التالي .

نلخص خواص الاستقرار لانماط النقط الحرجة التي ناقشناها في الجدول التالي

الحالة	طبيعة جذور المعادلة المميزة	طبيعة النقطة الحرجة	استقرار النقطة الحرجة
(١)	جذران مختلفان ومن إشارة واحدة	عقدة من النوع الثاني	مستقرة مقاربة إذا كان الجذران سالبين ، وقلقة إذا كانا موجبين
(٢)	جذران حقيقيان مختلفان ومن اشارتين مختلفتين	نقطة سرجية	قلقة
(٣)،(٤)	جذر حقيقي مضاعف	عقدة (من النوع الاول أو الثاني)	مستقرة مقاربة إذا كان الجذران سالبين ، وقلقة إذا كانا موجبين
(٥)	تخيليان صرفان	مركز	مستقرة ولكنها ليست مستقرة مقاربة
(٦)	عقديان ولكنها ليسا تخيليين صرفين	نقطة حلزونية	مستقرة مقاربة إذا كان الجزء الحقيقي للجذرين سالباً ، وقلقة إذا كان الجزء الحقيقي موجباً

(٣ ـ ١) تمارين

عين طبيعة النقطة الحرجة $(0,0)$ لكل مجموعة من المجموعات التالية وبين فيما إذا كانت مستقرة ، مستقرة مقاربة أو قلقة :

(١) $\frac{dx}{dt} = 2x + 5y \qquad \frac{dy}{dt} = x - 2y$

(٢) $\frac{dx}{dt} = 2x + 5y \qquad \frac{dy}{dt} = -x + 5y$

(٣) $\frac{dx}{dt} = -4x + 3y \qquad \frac{dy}{dt} = -2x + y$

(٤) $\frac{dx}{dt} = 2x + y \qquad \frac{dy}{dt} = -x + 2y$

(٥) $\frac{dx}{dt} = x - 4y \qquad \frac{dy}{dt} = x + 5y$

(٦) $\frac{dx}{dt} = -3x + y \qquad \frac{dy}{dt} = -x - 3y$

٤ ـ النقط الحرجة لمجموعة خطية تقريباً : لنوجه اهتمامنا الآن إلى مجموعة المعادلتين :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y) \qquad (1)$$

ولنفرض ان لهذه المجموعة نقطة حرجة منعزلة ، حيث يمكننا دون أن نمس عمومية المسألة أن نفترض هذه النقطة الحرجة في نقطة الأصل . وسنفرض في هذا

البند انه يمكن كتابة F و G في جوار لنقطة الاصل بالشكل :

$$F(x,y) = ax + by + f(x,y)$$

(2)

$$G(x,y) = cx + ey + g(x,y)$$

بفرض ان احدى الدالتين f و g على الاقل ليست خطية وأن f و g صغيرتان بالمقارنة مع $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، أي أن :

$$\lim_{r \to o} \frac{f(x,y)}{r} = 0 \ , \ \lim_{r \to o} \frac{g(x,y)}{r} = o$$

إن هذه الفروض بخصوص F و G محققة فيما إذا كان كل من F و G قابـــلاً للنشر في متسلسلة تايلور تكون فيها الحدود الخطية موجودة . عندئذٍ يكون :

$$a = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{(0,0)} \ b = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{(0,0)} \ c = \left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{(0,0)} \ e = \left[\frac{\partial G}{\partial y}\right]_{(0,0)}$$

لنفرض أن $ae - bc \neq o$.

ضمن هذه الفروض يكون $f(x,y)$ و $g(x,y)$ مهمولاً بالمقارنة مع x و y في جوار صغير بقدر كاف لنقطة الأصل . ولهذا السبب يقال عن هـذه المجموعـة انها خطية تقريباً . إن هذا الأمر يجعلنا نتوقع أن المجموعتين (1) و (2) تتصرفان، على نحو رئيسي ، كالمجموعة التي درسناها في البند السابق . إن هذا التوقع مصيب في بعض الحالات ولكنه خاطىء في حالات أخرى .

وللقيام بهذه الدراسة نفرض :

$$|f| < \epsilon(|x|+|y|) \ ; \ |g| < \epsilon(|x|+|y|) \quad (3)$$

بفرض أن $\epsilon(x, y)$ موجب ويسعى بانتظـــام نحو الصفر مع r . وإذا أجرينا التحويل :

$$X = y - \alpha_1 x \qquad Y = y - \alpha_2 x$$

بفرض أن α_1وα_2 جذران متمايزان للمعادلة : $c + (e - a)\alpha - b\alpha^2 = o$

فإن المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c x + e y + g(x, y)}{a x + b y + f(x, y)} \qquad (4)$$

تأخذ الشكل :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{k_1 Y + \eta_1}{k_2 X + \eta_2} \qquad (5)$$

بفرض أن كلا من η_1وη_2 يسعيان إلى الصفر . لنستخدم مجدداً x بدلا من X في (5) و y بدلاً من Y ، فإن (5) تكتب بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_1 y + \eta_1}{k_2 x + \eta_2} \qquad (6)$$

لنقارن هذه المعادلة بالمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_1 y}{k_2 x} \qquad (7)$$

ان حل هذه المعادلة هو :

$$y = c\, x^{\frac{k_1}{k_2}}$$

فإذا فرضنا أن لـ k_1 و k_2 إشارتين مختلفتين فعندئذ يكون لـ (7) نقطـــة سرجية ويكون هناك مساران $y = 0$ و $x = 0$ يمران بنقطة الأصل . أما (6) فتعطينا صورة مشابهة حيث نحصل على مسارين منحنيين يمران بنقطة الأصل . أما بقية المسارات فلا تفعل ذلـك . ولاثبات هـذه الحقيقة نرسم المنحنيين C_1 وC_2 المعرفين بـ $k_1 y + \eta_1 = o$ و $k_2 x + \eta_2 = o$ على الترتيب . يقارب الأول ، عند نقطة الاصل ، المحور ox ويقارب الثاني المحور oy ، ويمر كل منهما بنقطة الاصل . وليس لهما باستثناء هذه النقطة أية نقطة مشتركة أخرى في جوار لمبدأ الاحداثيات. ان C_1 وC_2 يحصران أربع زوايا . لنتصور أننا رسمنا من نقطة الاصل نصفي المستقيمين $\frac{\pi}{2} - \delta$ و $\frac{\pi}{2} + \delta$ (δ عدد صغير موجب) واخترنا على هذين المستقيمين نقطتين A و B تبعدان البعد نفسه عن نقطة الاصل . إن النقطة AB توازي oy . يمكن التحكم بوضعي النقطتين A و B بحيث لايحوي المثلث oAB أية نقطة من C_2 باستثناء o .

يكون عندئـذ $\frac{dy}{dx}$ منتهياً وسالباً في الزاوية الاولى العليـا (بفرض أن $k_1 > o$ و $k_2 < o$) وموجباً في الزاوية الثانية السفلى .

وإذا كانت P نقطة من oA فعندئذ يمكننا أن ننطلق منها على المنحني التكاملي المار بها وفي اتجـاه x المتزايدة (يوجد مثل هـذا المنحني إستناداً إلى نظرية الوجود) إلى أن نصل إلى نقطة محيطية Q من المثلث oAB . إن هذه النقطة تقع على AB . وبما أن المنحني التكاملي فوق C_1 يهبط فـلا يمكن أن يقطع oA مرة اخرى . كذلك لايمكن أن يلاقي oB لانه بعد أن يجتاز C_1 نحو الزاويـة السفلى يصعد . وبهذا نرى أنه يقابل كل نقطة P من oA نقطة Q من AB . واذا كانت P_1 وP_2 نقطتين من oA و P_2 اقرب من P_1 إلى o فإن Q_2 المقابلة

لـ P_2 أدنى من Q_1 المقابلة لـ P_1 ، لانه لايمكن لمنحنيين تكامليين للمعادلة (6) أن يتقاطعا . بهذا نرى أن للنقطة Q حداً أدنى R تتقارب منه Q عندما تقترب P من o . ويصح الامر نفسه بالنسبة للضلع oB ، أي أنه يقابل كل نقطة $\overline{F}$ من oB نقطة $\overline{Q}$ من AB . ويكون لـ $\overline{Q}$ حد أعلى $\overline{R}$. ومن الواضح أنـــه لايمكن لـ $\overline{R}$ أن تكون أعلى من R .

لنبرهن أن R و $\overline{R}$ منطبقان . لما كان AB موازياً للمحور y وكان y' منتهياً فمن الممكن تتبع المنحنيين التكامليين انطلاقاً من R و$\overline{R}$ ونحو السينات السالبة . إن هذين المسارين لابد وأن يصبا في نقطة الأصل ، لأنه لايمكن لهما أن يتقاطعا مع المنحنيات التكاملية الصادرة عن P_v و $\overline{P}_v$. ليكن $y = y(x)$ المنحني التكاملي المار بـ R و $\overline{y} = \overline{y}(x)$ المنحني التكاملي المار بـ $\overline{R}$ ولنبرهن $y \equiv \overline{y}$. إذا لم يكن $y \equiv \overline{y}$ فإن $y > \overline{y}$ من أجل كل قيمة موجبة لـ x لأنه لايمكن لهما أن يتقاطعا ومن جهة ثانية ان :

$$\frac{d(y-\overline{y})}{dx} = \frac{k_1 y + \eta_1(x,y)}{k_2 x + \eta_2(x,y)} - \frac{k_1 \overline{y} + \eta_1(x,\overline{y})}{k_2 x + \eta_2(x,\overline{y})}$$

$$\frac{d(y-\overline{y})}{dx} = \frac{k_1 k_2 (y-\overline{y})x + k_2 x(\eta_1(x,y) - \eta_1(x,\overline{y}))}{(k_2 x + \eta_2(x,y))(k_1 x + \eta_2(x,\overline{y}))}$$

$$\frac{+k_1 y \eta_2(x,\overline{y}) - k_1 \overline{y}\eta_2(x,y) + \eta_2(x,y)\eta_3(x,\overline{y}) - \eta_1(x,\overline{y})\eta_2(x,y)}{(k_2 x + \eta_2(x,y))(k_1 x + \eta_2(x,\overline{y}))}$$

لنثبت أن البسط معدوم . سنفعل ذلك ضمن فرضية بسيطة (وإن كان من الممكن اثبات الأمر بشروط أضيق) . سنفترض أن η_1 و η_2 تحققان الشرط :

$$| \eta_\nu (x,y) - \eta_\nu (x,\overline{y}) | = \epsilon_\nu (y - \overline{y}) \qquad \epsilon_\nu \to 0$$

عندئذ يكون (بفرض أن ϵ فيما يأتي هي كمية تسعى إلى الصفر مع x)

$$| k_2 x (\eta_1(x,\eta)) - \eta_1(x,\overline{y})) | < \epsilon x (y - \overline{y})$$

$$| k_1 y \eta_2(x,\eta)) - k_1 \overline{y} \eta_2(x,y) | = | k_1 (y - \overline{y}) \eta_2(x,\overline{y}) - k_1 \overline{y} (\eta_2(x,\eta) - \eta_2(x,\overline{y})) |$$

$$< \epsilon x (y - \overline{y}) + \epsilon \overline{y} (y - \overline{y}) < \epsilon x (y - \overline{y})$$

ذلك لان $| \overline{y} | < tg (\frac{\pi}{2} - \delta) . x$. وأخيراً يكون :

$$| \eta_1 (x,y) \eta_2 (x,\overline{y}) - \eta_1 (x,\overline{y}) \eta_2 (x,y) | =$$

$$| (\eta_1 (x,y) - \eta_1(x,\overline{y})) \eta_2(x,\overline{y}) - \eta_1 (x,\overline{y}) (\eta_2 (x, y) - \eta_2 (x,\overline{y})) |$$

$$< | (\epsilon x + \epsilon | \overline{y} |)(y - \overline{y}) \epsilon + (\epsilon x + \epsilon | \overline{y} |)(y - \overline{y}) \epsilon < \epsilon . x (y - \overline{y})$$

ينتج عن هذا ان اشارة البسط هي من إشارة $k_1 k_2$ أي سالبة . هذا يعني أن $f(x) = y - \overline{y}$ يتناقص مع تزايد x . ولما كان $f(o) = o$ و $f(x) \geqslant o$ فإن هذا تناقض . وعلى هذا فإن $f(x) \equiv o$.

بهذا نكون قد أثبتنا أن منحنياً تكاملياً واحداً في اتجاه المحور x الموجب ينطلق من o . يمكن بشكل مماثل إثبات أن الامر نفسه يصح من أجل الاتجاهات الاحداثية الثلاثة الاخرى . ينتج عن هذا أن صورة النقطة السرجية تبقى تماماً كما هي .

الامر نفسه يصح من أجل العقدة (عندما يكون لـ k_1 وk_2 الاشارة نفسها) . يبقى أن نعالج الحالة التي تكون فيها k_1 و k_2 عقديتين . في هذه الحالة يكون للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + ey}{ax + by}$$

نقطة مركزية أو حلزونية .

ولدراسة هذه الحالة يستحسن استخدام الاحداثيات القطبية في المعادلة (4) . عندئذ نجد :

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{c\cos^2\theta + (e-a)\cos\theta\sin\theta - b\sin^2\theta + \frac{g}{r}\cos\theta - \frac{f}{r}\sin\theta}{a\cos^2\theta + (c+b)\cos\theta\sin\theta + e\sin^2\theta + \frac{g}{r}\sin\theta + \frac{f}{r}\cos\theta}$$

وان :

$$|f| < \epsilon(|x| + |y|) = r\epsilon(|\cos\theta| + |\sin\theta|) < 2r.\epsilon_2$$

$$|y| < 2r\epsilon_1 \qquad \epsilon_{1,2} \to 0$$

وعلى هذا فإن :

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{c\cos^2\theta + (e-a)\cos\theta\sin\theta - b\sin^2\theta + \epsilon_1}{a\cos^2\theta + (c+b)\sin\theta\cos\theta + e\sin^2\theta + \epsilon_2} \qquad (8)$$

ثم أن $\frac{r\,d\theta}{dr} = tg\,\varphi$ بفرض أن φ الزاوية بين المماس ومتجه الموضع (في جهة تزايد x وبالتالي في جهة تزايد r) . إن البسط (بغض النظر عن ϵ_1) لايغير اشارته لان المميز :

$$(e - a)^2 + 4cb$$

وهو مميز المعادلة (2) ، سالب . وعلى هذا فإن القيمة المطلقة له تبقى اكبر من قيمة معينة مهما كانت θ و r شرط أن تبقى r صغيرة . ينتج عن هذا أن

المنحني ، فيما إذا اقترب من نقطة الاصل ، فإنه يدور حولها عدداً غير منته من المرات . لانه لو بقيت θ بين قيمتين θ_1 و θ_2 ولاحظنا أن :

$$\left|\frac{1}{r}\ \frac{dr}{d\theta}\right| < M$$

ذلك لان القيمة المطلقة للبسط في (8) أكبر من عدد ثابت. كذلك فإن القيمة المطلقة للمقام محدودة ، ولو كاملنا بدءاً من نقطة (θ_0, r_0) :

$$\left|\lg \frac{r}{r_0}\right| < M\,(\theta - \theta_0) < M_1$$

لوجدنا أنه لايمكن لـ r أن تسعى إلى الصفر لان الطرف الايمن محدود . ولما كان r بعد ذلك يحقق استناداً إلى (8) معادلة تفاضلية من الشكل $dr/d\theta = f(r, \theta)$ حيث لايصبح f أبداً غير منته ، فعندئذ يوجد ، استناداً إلى مبرهنة الوجود ، حل $r = r(\theta)$ لهذه المعادلة . فإذا تتبعنا مساراً من (r_0, θ_0) في اتجاه تزايد θ (في الاتجاه الموجب) ، فعندئذ يقابل كل قيمة لـ θ قيمة لـ r . وعلى هذا فإن المسار يدور حتى يعود ثانية إلى نصف القطر المتجه ذاتـــه بقيمة r_1 مختلفة بوجه عام عن الاولى r_0 (ان r_1 تكون مختلفة فعلا عن r_0 إذا لم يكن للمعادلة $a + (c + b)\, z + ez^2 = o$ أي جذر حقيقي . عندئـذ يكون لـ $dr/d\theta$ استناداً إلى (8) اشارة واحدة ، وبالتالي فإن r اما ان تكون متزايدة أو تكون متناقصة) . فإذا كان $r_1 = r_0$ فإن المسار مغلق وإذا كانت جميع المسارات مغلقة فإننا نحصل على نقطة مركزية . اما إذا كانت $r_1 < r_0$ فعندئذ إذا درنا ثانية حول نقطة الاصل فإننا نعود بقيمة جديدة r_2 أصغر من r_1 لان المنحني التكاملي لايتقاطع نفسه . وبهذا نجد القيم $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$ لـ r على نصف القطر المتجه $\theta_0\ (+2k\pi)$. فإذا حصل ان كان $r_n \to o$ فإننا نحصل على حلزون . ان الامر

نفسه يصح من أجل كل نصف قطر متجه آخر θ إذ يكون عندئذ ايضاً $r_n \to o$ لأنه لو حصل $r_n \to r^* > o$ فإن المنحني التكاملي المار من النقطة (r, θ) ، بفرض أن $r < r^*$ ، والذي يدور بالطبع حول نقطة الأصل لابد وان يقطع المنحني التكاملي الاول . وإذا كان أحد المسارات هو حلزون يصب في نقطة الاصل فإن المسارات الاخرى حلزونات تجري في طيات الحلزون الاول . وهكذا يكون لدينا نقطة حلزونية .

أما إذا كانت النهاية r^* لـ r_n على نصف القطر المتجه θ_0 ، غير معدومة فإن هذا الأمر يصح بالنسبة لكل نصف قطر متجه آخر θ . فالمسار يلف حلزونياً على منحن مغلق يسمى دورة حدية . ان هذا المنحني هو مسار ، اعني هو المسار المار بالنقطة (r^*, θ_0) ، ولا يمكن لهذا المسار إلا أن يكون مغلقاً وإلا فإنه باتجاه r المتزايدة سيقطع المنحني التكاملي السابق بعد دورة . إن مثل هذه الدورة الحدية يمكن أن تتكرر ثانية ، بل يمكن أن نجد متتالية غير منتهية منه تقترب من نقطة الاصل . وبين هذه الدورات الحدية يوجد مسارات حلزونية .

والخلاصة : إن مسارات المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ex + ey + g(x, y)}{ax + by + f(x, y)}$$

بفرض أن $f(x, y) \to o$, $g(x, y) \to o$ (بسرعة كافيــة) لاتختلف من حيث الشكل عن مسارات المعادلة التفاضلية .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + ey}{ax + by}$$

إلا أنه إذا كان للمعادلة الثانية نقطة حلزونية أو نقطة مركزية فإنـــه من الممكن أن يكون للأولى دورات حدية الأمر الذي لايحصل للمعادلة الثانية .

(٤ - ١) **امثلة ١** - لتكن لدينا المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + x\cos y$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - \sin y$$

إن هذه المجموعة تكتب بالشكل :

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + x\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \dots\right) = 2x + 2y + \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} \dots\right)x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \dots\right) = -2y - \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \dots\right)$$

وهكذا نجد أن :

$$a = 2 \quad b = 2 \quad c = o \quad e = -2$$

والمعادلة المميزة للمجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 2y \qquad \frac{dy}{dt} = -2y$$

هي : $m^2 - 4 = o$. إن الجذرين هما $m = \pm 2$ فالنقطة (o,o) هي نقطة سرجية .

وفي الواقع أننا نجد من المجموعة المفروضة أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - \sin y}{x + 2y + x\cos y}$$

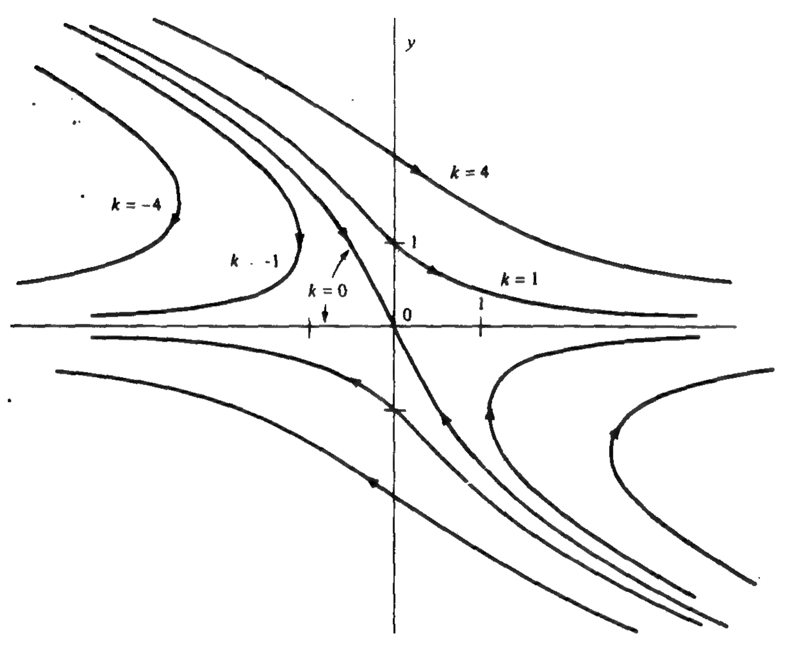
أو :

$$(y + \sin y)\,dx + (x + 2y + x\cos y)\,dy = o$$

وهذه المعادلة تامة ، وتكاملها هو :

$$xy + y^2 + x \sin y = k$$

وفي الشكل نرى مسارات هذه المجموعة لأجل بعض قيم k .



٢ ــ أما في حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \frac{dy}{dt} = -x - y^2$$

فإننا نجد أن المجموعة الخطية الموافقة هي :

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \frac{dy}{dt} = -x$$

والمعادلة المميزة هي $m^2 + 1 = o$ فنقطة الاصل هي نقطة مركزية أو نقطة

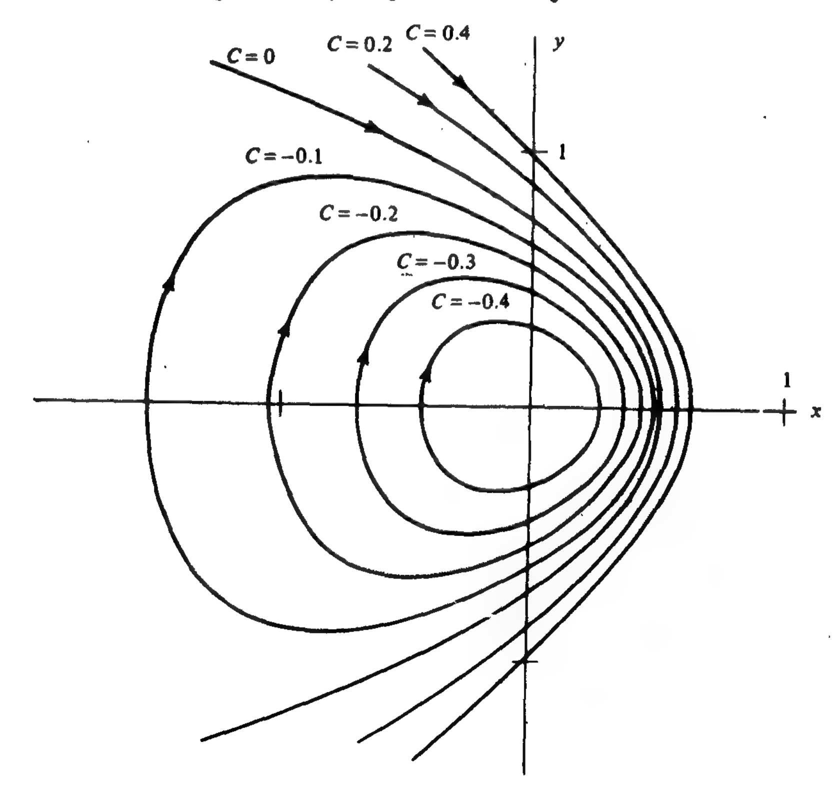
حلزونية . غير أننا نجد من المجموعة المفروضة أن :

$$\frac{dy}{dx} + y = -\frac{x}{y}$$

وهذه معادلة برنوي وبحلها نجد :

$$y^2 = -x + \tfrac{1}{2} + ce^{-2x}$$

لأجل $c = 0$ نجد قطعاً مكافئاً . وإذا كان $c > 0$ فالمسارات منحنيات مفتوحة أما إذا كان $-\frac{1}{2} < c < 0$ فالمسارات منحنيات مغلقة حول نقطة الأصل . ولأجل $c = -\frac{1}{2}$ يؤول المسار إلى نقطة الاصل ، في حين نرى أنه لاتوجد مسارات عندما $c < -\frac{1}{2}$ إن النقطة الحرجة $(0, 0)$ هي نقطة مركزية للمجموعة المفروضة .



٣ – وفي حالة المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y \;. \qquad \frac{dy}{dt} = -x - y^3$$

نجد بشكل مماثل ان النقطة الحرجة (o,o) هي نقطة مركزية أو نقطة حلزونية . ولكننا نجد بحل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x + y^3}{y}$$

أن هذه النقطة الحرجة هي نقطة مركزية .

٤ – ولتوضيح الدورات الحدية ننظر في المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y + x - x\,(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y - y\,(x^2 + y^2)$$

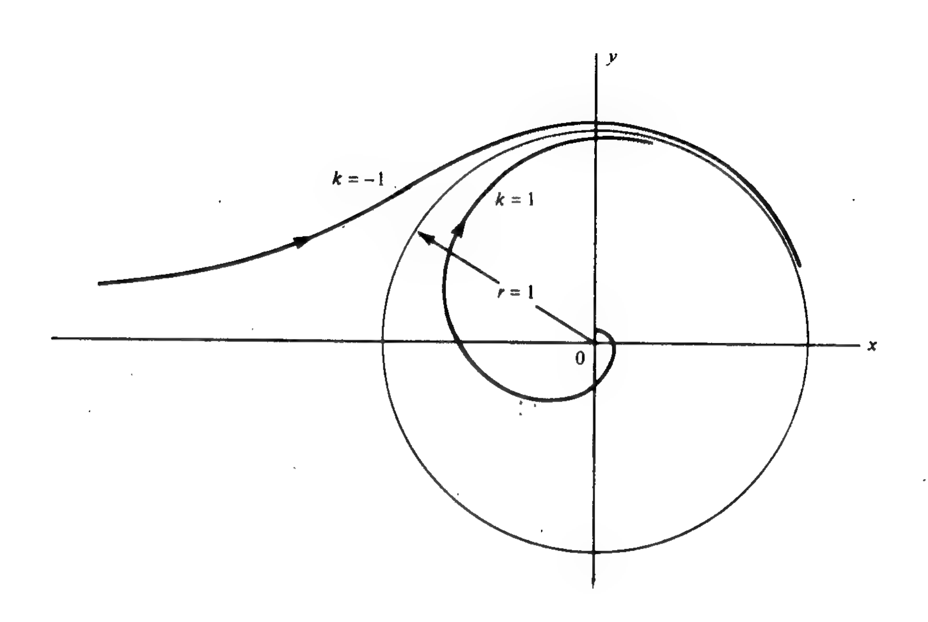
من هذه المجموعة نجد :

$$\frac{dr}{d\theta} = r\,(r^2 - 1)$$

وبالمكاملة نجد :

$$r^2 = \frac{1}{1 + ke^{-2\theta}}$$

لأجل $k = o$ نجد المسار هو الدائرة $r = 1$. وإذا كان $k > o$ فإن المسارات حلزونية تدور حول تلك الدائرة . أما إذا كان $k < o$ فإن المسارات حلزونات تدور حول نقطة الاصل .



(٤ ـ ٢) تمارين ، عين طبيعة النقطة الحرجة (0,0) لكل من المجموعات التالية:

١ ـ $\frac{dx}{dt} = 3x + 4y + x^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 4x - 3y - 2xy$

٢ ـ $\frac{dx}{dt} = 6x + 10y - x^2 \qquad \frac{dy}{dt} = -4x - 6y + 2xy$

٣ ـ $\frac{dx}{dt} = -x - x\cos y \qquad \frac{dy}{dt} = y + \sin y$

٤ ـ $\frac{dx}{dt} = x + 2y + 2\sin y \qquad \frac{dy}{dt} = -3y - xe^{x}$

٥ ـ $\frac{dx}{dt} = 1 + y - e^{-x} \qquad \frac{dy}{dt} = y - \sin x$

أوجد الدورات الحدية لكل من المجموعات التالية :

١ – $\frac{dr}{dt} = r(4 - r^2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = 1$

٢ – $\frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = 1$

٣ – $\frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2)^2(r-3) \qquad \frac{d\theta}{dt} = -1$

٥ ـ المجموعات التي هي ليست خطية تقريباً :

لايمكن في حالة مجموعة لاتحقق الشروط الواردة في البند الدابع تطبيق النتائج التي توصلنا إليها هناك . إن مناقشة المسارات حول النقط الحرجـة تتطلب دراسة خاصة . غير أننا سنكتفي فيما يلي بدراسة بعض الامثلة .

١ – لننظر في المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - x^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2xy$$

لاشك أن النقطة (o,o) هي نقطة حرجة منعزلة . ومن المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

نجد الحل :

$$y^3 = 3x^2y + k$$

وبرسم المسارات الموافقة للقيم المختلفة لـ k نجد أن النقطة الحرجـة هي من نوع النقطة السرجية وهناك ثلاثة خطوط مقاربة يتكون كل واحد منها من مسارين.

٢ – وإذا نظرنا في المجموعة :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2y^2 - xy$$

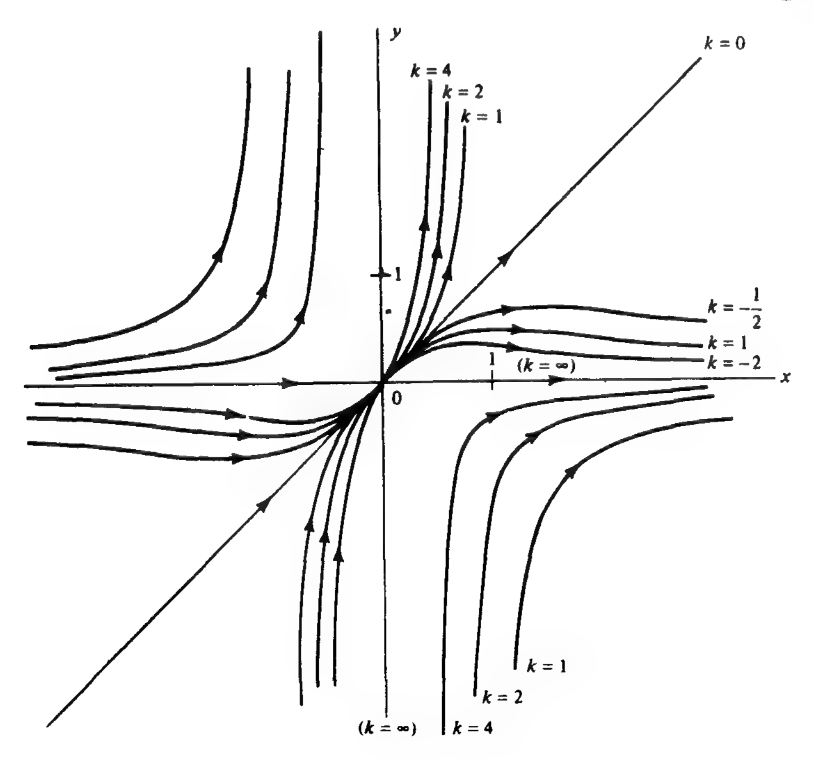
فإننا نجد أن نقطة الاصل هي نقطة حرجة منعزلة . وبحل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - xy}{x^2}$$

نجد :

$$y = \frac{x}{1 - kx^2}$$

وبرسم المسارات الموافقة لقيم مختلفة لـ k نجد أن النقطة الحرجة هي مركب عقدة مع نقطة سرجية .



الفصل الرابع

مسائل القيم الحدية والقيم الذاتية ، استقرار الحلول

١ ـ مسائل القيم الحدية

(١ ـ ١) مقدمة : إن مسألة القيم الحدية لمعادلة تفاضلية من المرتبة n .

$$u^{(n)} = f(x, u, \ldots, u^{(n-1)})$$

هي تلك المسألة التي نطلب فيها ايجاد حل لهذه المعادلة يحقق شروطاً إضافية لاتتعلق بموضع واحد كما هو الحال في مسائل القيم الابتدائية بل تتعلق بموضعين a و b والحل الذي نبحث عنه ينبغي أن يصح في الفترة $a \leqslant x \leqslant b$

وبسبب أهمية مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية .

$$u'' + a_1(x)\, u' + a_0(x)\, u = g(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad (1)$$

في التطبيقات الفيزيائية والهندسية فإننا سنوجه إهتماماً خاصاً لها .

ومن أمثلة مسائل القيم الحدية نذكر :

النوع الأول : $u(b) = \eta_2 \qquad u(a) = \eta_1$

النوع الثاني : $u'(b) = \eta_2 \qquad u'(a) = \eta_1$

النوع الثالث : $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_1$ ، $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_2$

ومن الواضح أن النوعين الأول والثاني حالتان خاصتان من النوع الثالث ، يسمى النوع الثالث عادة شرط شتورم الحدي .

كذلك هناك شروط حدية أخرى مثل :

$$u(a) - u(b) = \eta_1 \quad , \quad u'(a) - u'(b) = \eta_2$$

وإذا كان $\eta_1 = \eta_2 = 0$ سمي هذا الشرط « الشرط الحدي الدوري » . وسبب هذه التسمية هو التالي :

إذا كانت الدوال $a_1(x)$ و $g(x)$ مستمرة في R ودورية بدور $l = b - a$ ، وإذا كان $u(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية فإن $v(x) = u(x + l)$ هو حل كذلك (يمكن تمديد كل حل إلى R) . وإذا حقق $u(x)$ الشرط الحدي الدوري المذكور فإن $v(a) = u(a)$ وان $v'(a) = u'(a)$ ، وبالتالي استناداً إلى نظرية الوجود لمسألة القيم الابتدائية يكون $v = u$. وهذا يعني أن $u(x)$ دوري .

وعلى خلاف مع مسألة القيم الابتدائية حيث اثبتنا مبرهنة الوجود والوحدانية الحل ، فإن هناك حالات من مسائل القيم الحدية البسيطة لاتصح فيها وحدانية الحل بل قد لايكون للمسألة أي حل . لنأخذ على سبيل المثال المعادلة $u'' = 0$. إن حلول هذه المعادلة هي الدوال الخطية .وعلى هذا فإن مسألة القيم الحدية من النوع الأول قابلة للحل دائماً . أما إذا كان $\eta_1 \neq \eta_2$ في النوع الثاني فليس للمسالة حل . وإذا كان $\eta_2 = \eta_1$ فهناك عدد غير منته الحل .

(١ ـ ٢) مسالة شتورم الحدية : سنعالج فيما يلي مسألة شتورم الحدية التالي :

$$Lu = (p(x)\, u')' + q(x) u = g(x) \qquad (2)$$

في $J = [a, b]$:

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = \eta_1$$

(3)

$$R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) = \eta_2$$

ضمن الفروض التالية والتي سنرمز لها فيما يلي بـ (S) .

p, q, g دوال ذات قيم حقيقية و $P \in C^1(J)$ ، أي أن لـ $p(x)$ مشتقاً مستمراً على J ، و $q, g \in C^0(J)$ ، أي أن q و g مستمرتان على J ، وان $p(x) > 0$ في J وان :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0 \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$$

ليلاحظ اننا لم نكتب المؤثر التفاضلي الخطي L بالشكل (1) بل بالشكل (2) الذي يوصف بانه متقارن ذاتياً . وسنرى سبب هذه التسمية بعد قليل . ومن الواضح انه يمكن نقل المعادلة (1) إلى المعادلة (2) بالضرب بـ $p(x) = e^{\int a_1(x) dx}$.

ولنذكر أيضاً ان وجود المضروبين $p(a)$ و $p(b)$ في الشرطين الحديين $R_1 u$ و $R_2 u$ يعود لأسباب عملية .

ان مسألة القيم الحدية المتجانسة الموافقة للمسألة المطروحة فهي :

$$L u = 0 \qquad R_1 u = R_2 u = 0 \qquad (4)$$

وإذا كان $u, v \in C^2(J)$ فإن متطابقة لاغرانج التالية تكون صحيحة .

$$v L u - u L v = \{ p(x) (u' v - v' u) \}' \qquad (5)$$

ومن هذه المتطابقة تنتج العلاقة الهامة التالية :

$$\int_a^b (v\,L\,u - u\,L\,v)\,dx = 0 \qquad (6)$$

وذلك فيما إذا حقق كل من u و v الشروط الحدية المتجانسة :

$$R_i\,u = R_i\,v = o \qquad (i = 1, 2)$$

وتعليل ذلك هو أن العبارة $u'v - v'u$ معدومة عند الطرفين a, b . ففي الحالة $\alpha_2 = o$ يكون $u(a) = v(a) = o$ ، أما إذا كان $\alpha_2 \neq o$ فإن $u'(a) = \delta\,u(a)$ وأن $v'(a) = \delta\,v(a)$ بفرض أن :

$$\delta = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2\,p(a)}$$

والأمر نفسه يصح عند الموضع $x = b$

سنرمز فيما يلي بـ ... u, u_1, u_2 لحلول المسألة الحدية المتجانسة و بـ ... v, v_1, v_2 لحلول المسألة الحدية غير المتجانسة .

من الواضح أن $\Sigma\, c_i\, u_i$ (بفرض أن هذا المجموع منته) هو حل للمسألة الحدية المتجانسة وأن $v + u$ هو حل للمسألة غير المتجانسة وأن $v_1 - v_2$ هو حل للمسألة المتجانسة . إن جميع الحلول v تعطى بالشكل :

$$v = v^* + u$$

بفرض أن v^* حل خاص لغير المتجانسة وأن u تجري على جميع حلول المسألة الحدية المتجانسة .

(١ ـ ٣) مبرهنة : ليكن $u_1(x)\,,\,u_2(x)$ مجموعة أساسية للمعادلة التفاضلية المتجانسة $L\,u = o$. عندئذ يلزم ويكفي كي يكون المسألة الحدية غير المتجانسة (2) و (3) حل وحيد هو أن يتحقق الشرط :

$$\begin{vmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (7)$$

ويكون للمسألة المتجانسة في هذه الحالة الحل الصفري فقط $u = 0$.

البرهـان : إذا كان v^* حلا خاصاً ل (2) ، فعندئذ يكون الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو :

$$v = v^* + c_1 u_1 + c_2 u_2 \qquad (c_1 , c_2 \in \mathbb{R})$$

وعندئذ تعطي الشروط الحدية (3) معادلتين خطيتين في c_1 , c_2 .

$$R_i v = R_i v^* + c_1 R_i u_1 + c_2 R_i u_2 = \eta_i \qquad (i = 1 , 2)$$

ويلزم ويكفي كي يكون لهذه المجموعة حل وحيد هو أن يتحقق الشرط (7).

مثال (آ) $u'' + u = g(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$R_1 u = u(0) + u'(0) = \eta_1 \qquad R_2 u = u(\pi) = \eta_2$$

مهما كانت $\eta_1 , \eta_2 , g(x)$ فإن المعين (7) الموافق للمجموعـــة الأساسية $u_1 = \cos x \quad u_2 = \sin x$ هو :

$$\begin{vmatrix} R_1(\cos x) & R_1(\sin x) \\ R_2(\cos x) & R_2(\sin x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

(ب) إذا وضعنا $g(x) = 1$ في (آ) فعندئذ يكون :

$$v(x) = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

هو الحل العام للمعادلة . وإذا فرضنا $\eta_1 = \eta_2 = 0$ فإن :

$$1 + c_1 + c_2 = 0 \qquad 1 - c_2 = 0$$

ومنه نجد الحل المطلوب :

$$v(x) = 1 + \cos x - 2 \sin x$$

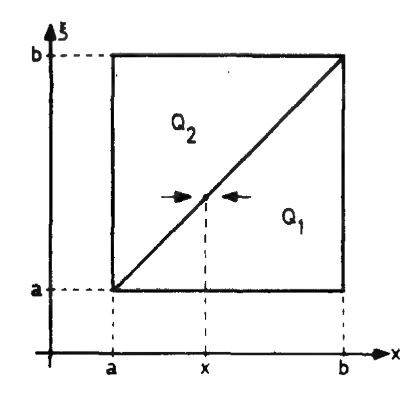
(ح) أما إذا كانت الشروط الحدية هي :

$$R_1 u = u(0) = \eta_1 \qquad R_2 u = u(\pi) = \eta_2$$

فعندئذ ينعدم المعين (7) وعندئذ يكون للمسألة المتجانسة عدد غير منته من الحلول بالاضافة إلى الحل الصفري ، وهذه الحلول هي $u = C \sin x$

(٤ - ٤) التحويل الاساسية : ليكن $J = [a,b]$ وليكن Q هو المربع $J \times J$ في المستوي (x,ξ) ، و Q_1 هو المثلث $b < x < \xi < a$ و Q_2 هو المثلث $a < x \leqslant \xi \leqslant b$.

نقول عن دالة $\gamma(x,\xi)$ انها حل أساسي للمعادلة المتجانسة الموافقة لـ (2) إذا حققت الخواص التالية (بفرض أن $p > 0$)



(آ) $\gamma(x , \xi)$ مستمر في Q .

(ب) توجد في كل من المثلثين Q_1, Q_2 المشتقات الجزئية المستمرة γ_x و γ_{xx} (على أن نأخذ على القطر المشتقات من جانب واحد لكل مثلث) .

(حـ) ان $\gamma(x,\xi)$ ، لأجل كل قيمة ξ من J ، هي دالة في x وتمثل حلا لـ $L\gamma = 0$ مهما كانت x من $J - \{\xi\}$.

(د) أما على القطر $\xi = x$ فإن المشتق الأول يقفز بالكمية $\frac{1}{p}$ أي :

$$\gamma_x(x+0,x) - \gamma_x(x-0,x) = \frac{1}{p(x)} \qquad a < x < b$$

حيث نفهم من $\gamma_x(x+0,x)$ النهاية من اليمين لـ γ_x عندما تقترب من الموضع (x,x) ونفهم من $\gamma_x(x-0,x)$ النهاية من اليسار .

إن الحل الأساسي ليس وحيداً لأنه إذا كان γ حلا أساسياً فإن :

$\overline{\gamma}(x , \xi) = \gamma(x, \xi) + \alpha(\xi)\, u(x)$ هو حل أساسي فيما إذا كان $\alpha(\xi)$ مستمراً و $u(x)$ حلاً لـ $Lu = 0$ في J .

وعلى سبيل المثال إذا أخذنا $p(x) = 1$ فإن $\gamma(x, \xi) = \frac{1}{2}|x - \xi|$ هو حل أساسي للمعادلة :

$$u'' = 0$$

وان $\gamma(x, \xi) = \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda|x-\xi|$ هو حل أساسي للمعادلة :

$$u'' + \lambda^2 u = 0 \qquad 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$$

وبمساعدة حل اساسي يمكن الوصول إلى حلول للمعادلة غير المتجانسة ، كما نرى في المبرهنة التالية :

(١ ــ ٥) مبرهنة ضمن المفروض (S) إذا كان $\gamma(x,\xi)$ حلاً أساسياً فإن الدالة :

$$v(x) = \int_a^b \gamma(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi \qquad (8)$$

تنتمي إلى $C^2(J)$ وتمثل حلاً للمعادلة غير المتجانسة .

$$L\, v = g(x)$$

البرهان لنجزىء التكامل (8) إلى تكامل من a إلى x وتكامل من x إلى b ونشتق كل جزء على حده فنحصل على :

$$v'(x) = \gamma(x,x)g(x) + \int_a^x \gamma_x(x,\xi)g(\xi)d\xi - \gamma(x,x)g(x) + \int_x^b \gamma_x(x,\xi)g(\xi)d\xi$$

$$= \int_a^b \gamma_x(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

وإذا تابعنا بالاسلوب نفسه واعتمدنا على الخاصة (S) للحل الأساسي فإننا نجد :

$$v''(x) = \gamma_x(x+o,x)g(x) + \int_a^x \gamma_{xx}(x,\xi)g(\xi)d\xi - \gamma_x(x-o,x)g(x)$$

$$+ \int_x^b \gamma_{xx}(x,\xi)g(\xi)\, d\xi = \int_a^b \gamma_{xx}(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi + \frac{g(x)}{p(x)}$$

وينتج من هذا اعتماداً على الخاصة (ﺣ) :

$$Lv = pv'' + p'v' + qv = \int_a^b L\gamma(x,\xi)g(\xi)\,d\xi + g(x) = g(x)$$

(١ ـ ٦) دالة غرين إن دالة غرين لمسألة شتورم الحدية (4) هي دالة $\Gamma(x,\xi)$ تتصف بما يلي :

(آ) $\Gamma(x,\xi)$ حل أساسي :

(ب) $R_1\Gamma = R_2\Gamma = o$ مهما كانت ξ من $J^o = (a,b)$

للوصول إلى دالة غرين ننطلق من مجموعة أساسية u_1, u_2 للمعادلة $Lu=o$ ونضع :

$$\Gamma(x,\xi) = \sum_{i=1}^{2} \{ a_i(\xi) \pm b_i(\xi)\} u_i(x) \qquad (9)$$

حيث نأخذ بالاشارة + من الاشارة المزدوجة $\pm$ في Q_1 وبالاشارة − في Q_2

إن شرطي الاستمرار لـ Γ والانقطاع لـ Γ_x على القطر $\xi = x$ يؤديان إلى:

$$\Sigma\, b_i(\xi)\, u_i(\xi) = o$$

(10)

$$\Sigma\, b_i(\xi)\, u'_i(\xi) = \frac{1}{2\,p(\xi)}$$

وهاتان المعادلتان تعينان b_1, b_2 لأن معين الامثال لهذه المجموعة الخطية هو معين رونسكي للحلين u_1, u_2 فهو لايساوي الصفر . ولتعيين $a_i(\xi)$ ننظر في الشرطين الحديين .

$$R_1\Gamma = \sum_{i=1}^{2} \{ a_i(\xi) - b_i(\xi)\} R_1 u_i = 0$$

$$R_2\, \Gamma = \sum_{i=1}^{2} \{ a_i(\xi) + b_i(\xi)\} R_2 u_i = 0$$

وهاتان المعادلتان تعطياننا حلا وحيداً a_1, a_2 إذا صح الشرط (7) .

(١ ـ ٧) مبرهنة ضمن الفروض (S) توجد دالة غرين وحيدة $\Gamma(x,\xi)$ لمسألة شتورم الحدية (4) فيما إذا كان لهذه المسألة الحل البدهي فقط ، أي إذا تحقق الشرط (7) . إن هذه الدالة متناظرة :

$$\Gamma(x,\xi) = \Gamma(\xi, x) \qquad (11)$$

ويمكن أن تتعين بـ (9) .

إن الحل (الوحيد استناداً إلى (١ ، ٣)) للمسألة الحدية « نصف المتجانسة »

$$Lv = g(x) \qquad R_1 v = R_2 v = 0$$

بفرض أن $(g \in C(J))$ هو :

$$v(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi \qquad (12)$$

البرهان إن الدالة v تحقق استناداً إلى (١ ـ ٥) المعادلة $Lv = g$. ولما كانت Γ تحقق المسألة الحدية المتجانسة فإن v تحقق أيضاً هذه المعادلة ، وذلك لانه يمكن عند اشتقاق $v(x)$ مرة أولى تحت رمز التكامل ، أي أنه يمكن مبادلة R_1 مع رمز المكاملة في (12) .

ولاثبات وحدانية دالة غرين وتناظرها نفرض مؤقتاً وجود دالتي غرين Γ_2, Γ_1 ونضع :

$$v(x) = \int_a^b \Gamma_1(x,\xi)\, g(\xi) d\xi \qquad w(x) = \int_a^b \Gamma_2(x,\xi) h(\xi)\, d\xi$$

بفرض أن g و h دالتان مستمرتان . وتصح بالنسبة لـ v و w ، اللذين يحققان الشروط الحدية المتجانسة ، العلاقة :

$$\int_a^b (v L w - w L v)\, dx = 0$$

وذلك استناداً إلى (6) .

لنعوض v و w بما يساويهما ملاحظين أن $L v = g, L w = h$ فإننا نجد :

$$\int_a^b \int_a^b h(x) \Gamma_1(x, \xi) g(\xi)\, d\xi = \int_a^b \int_a^b g(x)\, \Gamma_2(x,\xi)\, h(\xi) d\xi$$

أو :

$$\iint_Q [\, \Gamma_1(x, \xi) - \Gamma_2(\xi,x) \,]\, g(\xi)\, h(x)\, d\xi\, dx = 0$$

وبما أن g و h كيفيان فإن العلاقة الاخيرة لاتصح إلا إذا كان $\Gamma_1(x,\xi) = \Gamma_2(\xi,x)$ لنضع أولاً $\Gamma_1 = \Gamma_2$ فإننا نحصل على تناظر Γ_1 ، ونحصل بعد ذلك على وحدانية دالة غرين .

مثال : لمسألة القيم الحدية :

$L u = u'' = 0$ في $[0, 1]$ و $R_2 u = u(1) = 0 \qquad R_1 u = u(0) = 0$

تكون :

$$\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} \xi(x-1) & 0 < \xi \leqslant x < 1 \\ x(\xi-1) & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1 \end{cases}$$

دالة غرين . إن هذه الدالة وحيدة لان قيمة المعين (7) المجموعـة الاساسية $u_1 = 1$ ، $u_2 = x$ تساوي الواحد .

(١ ـ ٨) ملاحظات : (آ) توضح لنا المبرهنة (١ ـ ٧) أهمية دالة غرين ، إذ نستطيع إذا عرفناها أن نعطي حلاً صريحاً للمسألة الحدية نصف المتجانسة .

وإذا كان المطلوب حل مسألة القيم الحدية غير المتجانسة (2) و (3) ، فإننـــا نبحث أولاً عن دالة $\varphi \in c^2(J)$ تحقق شرطي الحد $(i = 1,2)$ $R_i \varphi = \eta_i$. إن هذه الوظيفة ليست صعبة . نضع بعد ذلك للوصول إلى الحل u للمسألة الحدية غير المتجانسة $u = \varphi + v$ فنجد أن على v أن تحقق الشرطين :

$$L u = L \varphi + L v = g \qquad R_i u = R_i \varphi + R_i u = \eta_i$$

أي أن v هو حل المسألة الحدية .

$$L v = h \qquad R_1 v = R_2 v = 0$$

وذلك بفرض أن $h = g - L\varphi$.

إن هذه المسألة استناداً إلى (١ ـ ٧) قابلة للحل .

(ب) يمكن استخدام دالة غرين لحل مسألة غير خطية . فإذا كان المطلوب حل مسألة القيم الحدية :

$$R_1 u = R_2 u = 0 \quad \text{و} \quad J \text{ في } L u = f(x, u) \qquad (13)$$

وإذا كانت Γ دالة غرين لـ L فعندئذ يلزم ويكفي كي يكون u حـلاً

لـ (13) هو أن يكون u مستمراً في J ، وأن يحقق المعادلة التكاملية :

$$u(x) = \int_a^b F(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi \qquad (14)$$

(١ ـ ٩) تمارين : ١ ـ إذا حققت الدالة $f(x,y)$ المستمرة في $[0,1] \times \mathbb{R}$ شرط ليبشتز ،

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leqslant L\,|y - z|$$

بفرض أن $L < \pi^2$ ، فإن لمسألة القيم الحدية .

$$u'' = f(x,u) \quad \text{في} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{و} \quad u(0) = u(1) = 0$$

حلا وحيداً .

إن هذه النتيجة غير صحيحة إذا كان $L = \pi^2$ (ولاثبات ذلك ننظر في المثالين $f(x,u) = -\pi^2 u$ و $f(x,u) = -\pi^2(u+1)$. في المثال الاول هنـــاك عدد غير منته من الحلول وفي المثال الثاني لايوجد أي حل) . اثبت ذلك .

ارشاد لنزود $C[0,1]$ بنظيم القيمة العظمى . فعندئذ يحقق المؤثر T :

$$(Tu)(x) = \int_0^1 F(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi$$

شرط ليبشتز بثابتة $\frac{L}{8}$. إن مبرهنة النقطة الثابتة تقدم لنا عندئذ المطلوب فيما إذا كان $L < 8$. وكي نحصل على النتيجة في الحالة العامة نختار نظيماً آخر مثل:

$$\| u \| = \sup_{0<x<1} \frac{| u(x) |}{\epsilon + \sin \pi x} \quad (\epsilon > o)$$

ولحساب قيمة التكامل الناتج نعود إلى المبرهنة (١ - ٧) . ويتبسط البرهان إذا اخترنا $\epsilon = o$. ولكننا نعمل عندئذ في فضاء باناخي آخر (ما هو هـــذا الفضاء ؟) .

٢ - بين أنه لمسألة شتورم في القيم الحدية (4) دالة غرين المعرفة بـ :

$$F(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{c} u_1(x)\, u_2(\xi) & a \leqslant x < \xi < b \\ \frac{1}{c} u_1(\xi)\, u_2(x) & a \leqslant \xi < x < b \end{cases}$$

بفرض أن (u_1, u_2) مجموعة أساسية لـ $L u = o$ مع

$$R_1 u_1 = o \qquad R_2 u_2 = o$$

وأن

$$c = p\,(u_1 u'_2 - u'_1 u_2)$$

(c هو ثابت !) .

٣ - حل مسألة القيم الحدية نصف المتجانسة :

$u'' + u = e^x$ في $[o, 1]$ ، $u(o) = u(1) = o$

(آ١) بوساطة مجموعة أساسية للمسألة المتجانسة وحل خاص للمعادلة غـــير المتجانسة (آ٢) بوساطة دالة غرين .

(ب) عين دالة غرين لمسألة القيم الحدية :

$u'' + \frac{L}{4x^2} u = o$ في $[1,2]$ ، $u(1) = u(2) = o$

ارشاد : استعن بالتحويل $x = e^t$.

٢ ـ مسالة شتورم ـ ليوفيل في القيم الذاتية :

(٢ ـ ١) طرح المسالة : إن مسالة شتورم ـ ليوفيل في القيم الذاتية هي المسألة

(1) $L u + \lambda\, r(x)\, u = o$ في $J = [a, b]$ $R_1 u = R_2 u = o$

بفرض أن L و R_1 و R_2 هي المؤثرات التي عرفناها في البند السابق :

(2) $L u = (p(x)\, u')' + q(x) u$

(3) $R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a)$ $R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b)$

فهي إذن مسألة قيم حدية متجانسة للمعادلة التفاضلية .

(4) $(pu')' + (q + \lambda r) u = o$

التي تتعلق بوسيط حقيقي λ (إن جميع الدوال ذات قيم حقيقية) .

وينصب الاهتمام فى مسألة القيم الذاتية على الحالات التي لايكون فيها لـ (1) حل وحيد ، أي على الحالات التي يكون فيها بالاضافة إلى الحل البدهي $u = o$ هناك حل آخر $u(x) \neq o$. إن هذا الأمر لايتحقق لأجل كل قيمة لـ λ بل لأجل قيم معينة لها ندعوها القيم الذاتية للمسألة . فالقيمة الذاتية إذن هي أي عدد λ بحيث يكون للمعادلة (1) حل $u(x)$ غير الحل البدهي . يسمى هذا الحل الدالة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية λ . ومن الواضح أنه إذا كانت $u(x)$ دالة ذاتية فإن $c\,u(x)$ ، بفرض أن $c \neq o$ ، دالة ذاتية أيضاً . وإذا وجد لقيمة ذاتية عدد من الدوال الذاتية المستقلة خطياً (p على الاكثر) فإننا نقول عن

القيمة الذاتية انها مضاعفة p مرة . وعندما يكون $p = 1$ نقول عنها انها قيمة ذاتية بسيطة .

مثال إذا كانت لدينا المسألة :

$$u'' + \lambda u = 0 \qquad u(0) = u(\pi) = 0$$

فإننا نجد بسهولة أنه إذا كان $\lambda = 0$ (الحل العام $u = c_1 + c_2 u$) أو كان $\lambda = -\mu^2 < 0$ (الحل العام $u = c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{-\mu t}$) فإنه لايوجد سوى الحل البدهي. أما إذا كان $\lambda = \mu^2 > 0$ فإن $u = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$ هو الحل العام وأن الشروط الحدية تتحقق عندما يكون $c_1 = 0$ و $\sin \mu \pi = 0$ فهناك اذن عدد عدود من القيم الذاتية البسيطة :

$$\lambda_n = n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

وأن الدوال الذاتية المقابلة لها هي :

$$u_n(x) = \sin nx$$

وإذا كانت φ دالة ذات مشتق مستمر في J (يمكن كذلك الاكتفاء بشرط أضعف من هذا الشرط) وكان $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ فإن من الممكن نشر $\varphi(x)$ في متسلسلة من الدوال الذاتية :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

وذلك لأننا لو مددنا $\varphi(x)$ باعتبارها دالة فردية إلى الفترة $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ ، لأصبح ممكنا نشرها في متسلسلة فورييه في الفترة $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. وهذه المتسلسلة لاتحوي سوى الحدود الجيبية . إن هذا المثال يدفعنا إلى مسألتين أساسيتين حول القيم الذاتية هما :

مسألة القيم الذاتية : ماهي الشروط التي ينبغي أن تتوفر كي توجد قيم ذاتية ، وكي يوجد عدد غير منته من القيم الذاتية λ_n ؟

مسألة النشر : ماهي الشروط كي يمكن نشر دالـــة كيفية في متسلسلة دوال ذاتية ؟

$$\varphi(x) = \sum a_n u_n(x)$$

إن المبرهنة التالية ستعطي جواباً على هذين السؤالين ضمن الفروض التالية التي سنرمز لها بـ (SL) .

(S L) $\quad p(x) \in C^1(J)\ ;\ q(x), r(x) \in C^\circ(J),\ p(x) > 0,\ r(x) > 0$

في J و $\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0,\ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$

(٢ ـ ٢) مبرهنة وجود : إذا تحققت الفروض (SL) فإن لمسألة القيم الذاتية (١) عدداً غير منته من القيم الذاتية الحقيقية :

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,\ \lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

إن للدالة الذاتية $u_n(x)$ الموافقة للقيمة الذاتية λ_n ، n صفراً في الفـــترة المفتوحة (a,b) ، وان بين كل صفرين لـ u_n يوجد صفر لـ u_{n+1} .

(٢ ـ ٣) مبرهنة نشر : يمكن تنظيم الدوال الذاتية بحيث يكون :

$$\int_a^b r(x)\, u_n^2(x)\, dx = 1 \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

إن هذه الدوال تشكل عندئذ نظاماً متعامداً منظماً ، أي أنه يكون كذلك:

$$\int_a^b r(x)\, u_m(x)\, u_n(x)\, dx = 0 \qquad m \neq n$$

وانه يمكن نشر كل دالة $\varphi(x) \in C^1(J)$ محققة للشروط الحدية المتجانسة في متسلسلة متقاربة اطلاقاً وبانتظام من الدوال الذاتية :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x)$$

وتسمى هذه المتسلسلة متسلسلة فوربيه لـ φ (بخصوص u_n) . وان أمثال فوربيه c_n هي :

$$c_n = \int_a^b r(x)\varphi(x)\, u_n(x)\, dx$$

وفيما يلي سنقدم اثباتاً لهاتين المبرهنتين ينسب إلى بروفر .

(٢ ـ ٤) **تحويل بروفر** : لنعرف دالتين $\rho(x)$ و $\varphi(x)$ على النحو :

$$u(x) = \rho(x)\sin\varphi(x) \qquad p(x)\,u'(x) = \rho(x)\cos\varphi(x) \tag{5}$$

وبفرض أن $\rho(x) > 0$ نجد :

$$\rho(x) = [\,(u(x))^2 + (p(x)\,u'(x))^2]^{1/2}\ , \quad \varphi(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{u(x)}{p(x)\,u'(x)}$$

إن $\varphi(x)$ معرفة بغض النظر عن مضاعف لـ 2π . ولتحديد $\varphi(x)$ نختار قيمة $\varphi(a)$ بحيث تحقق $-\pi < \varphi(a) \leqslant a$ ثم نختار قيمة $\varphi(a)$ بحيث تكون هذه الدالة مستمرة ويكون لها بالتالي مشتق مستمر .

من الدالة (4) والتحويل (5) نجد :

$$\varphi' = \frac{1}{p}\cos^2\varphi + (q + \lambda r)\sin^2\varphi \tag{6}$$

$$\rho' = \left(\frac{1}{p} - q - \lambda r \right) \rho \cos\varphi \sin\varphi \qquad (7)$$

والمعادلة (6) هي معادلة في φ من المرتبة الاولى فإذا ماتمكنا من حلها عوضنا في (7) وبالمكاملة نحصل على ρ .

(٢ ـ ٥) خواص φ . ليكن $u(x,\lambda)$ حلاً للمعادلة (4) بالقيم الابتدائية .

$$u(a) = \sin\alpha \qquad p(a)\,u'(a) = \cos\alpha \qquad (8)$$

بفرض أن α ثابت وأن $0 \leqslant \alpha < \pi$. إن هذا الحل ، كما يمكن لنا أن نثبت بالطرق التي استخدمناها في الفصل الأول وحيد ومستمر في $(x,\lambda) \in J \times R$ ، بل وتحليلي في λ . ويقابل هذا الحل وفق تحويل بروفر دالة $\varphi(x,\lambda) = \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{p\,u'}$ مستمرة أيضاً في (x,λ) ومحققة للمعادلة التفاضلية (6) أو للمعادلة :

$$\varphi' = \frac{1}{p} + \left(q - \frac{1}{p} + \lambda r \right) \sin^2\varphi \qquad (9)$$

مع الشرط $\varphi(a,\lambda) = \alpha$. ويتمتع هذا الحل بالخواص التالية :

(آ) $\varphi_\lambda(x,\lambda) > 0$ لأجل $\lambda \in R\ ,\ a < x \leqslant b$

(ب) $\varphi(b,\lambda) \to 0$ عندما $\lambda \to -\infty$

(ﺟ) توجد ثوابت موجبة δ, D, λ_0 بحيث يكون :

$$\delta\sqrt{\lambda} \leqslant \varphi(b,\lambda) \leqslant D\sqrt{\lambda} \qquad \lambda \geqslant \lambda_0$$

(د) ينتج عن $\varphi(x_0, \lambda_0) = k\pi$ (بفرض أن $k \in \mathbb{Z}$) أن $\varphi'(x_0 \lambda_0) > 0$. وبعبـــارة اخرى ان المنحني $y = \varphi(x, \lambda_0)$ يقطع في المستوي (x,y) المستقيم

$y = k\pi$ مرة واحدة على الأكثر وذلك يكون من الأدنى نحو الأعلى . وينتج بشكل خاص أن $\varphi(x,\lambda) > 0$ لأجل $a < x \leqslant b$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

ولبرهان هذه الخواص نلاحظ أن (د) تنتج عن (9) مباشرة بسبب كون $p > 0$.

ولاثبات (آ) نشتق (9) بالنسبة لـ λ فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية في $\varphi_\lambda = \psi$:

$$\psi' = \psi \left(q - \frac{1}{p} + \lambda r\right) 2 \sin\varphi \cos\varphi + r \sin^2\varphi$$

مع $\psi(a, \lambda) = 0$.

إن الدالة $y(x) = \psi(x, \lambda_0)$ تحقق معادلة تفاضلية خطية من الشكل :

$$y' = l(x)\, y + h(x) \qquad y(a) = 0 \qquad (10)$$

وبحلها نجد :

$$y(x) = \int_a^x e^{L(x) - L(t)}\, h(t)\, dt \qquad L(x) = \int_a^x l(t)\, dt$$

ولكن استناداً إلى (د) نرى $h(x) = r(x) \sin^2\varphi(x,\lambda_0) > 0$ باستثناء عدد منته من المواضع .. وعلى هذا فإن $y > 0$ لأجل $a < x \leqslant b$.

لاثبات (ب) نرمز للطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية (9) بـ $f(x,\varphi)$ ولنبحث عن دالة w تحقق :

$$w(a) > \alpha \qquad \text{و} \qquad w' > f(x, w)$$

لتكن $w(x)$ دالة خطية تحقق $w(a) = \pi - \epsilon$ و $w(b) = \epsilon$ بفرض أن ϵ عدد موجب صغير بحيث يكون $\alpha < w(a)$. عندئذ يكون $\sin^2 w \geqslant \sin^2 \epsilon$. وبما أننا نستطيع أن نكتب $0 < r_0 \leqslant r(x)$ فإنه يكون لأجل قيم λ السالبة :

$$f(x, w) \leqslant \frac{1}{p} + (q - \frac{1}{p} + \lambda r_0) \sin^2 \epsilon \xrightarrow[\lambda \to -\infty]{} -\infty$$

ولما وكان w' ثابتاً فإن w تحقق لأجل $0 > \lambda_0 \geqslant \lambda$ المتراجحة المذكورة $w' > f(x,w)$.

تسمى هذه الدالة w دالة عليا . ان $\varphi(x,\lambda) \leqslant w(x)$ مهما كانت x من J . لاثبات ذلك نلاحظ أن $\varphi(a,\lambda) < w(a)$ وبما أن كلا من φ و w مستمر فإن هناك عدداً $a < \xi$ بحيث يكون $\varphi(x,\lambda) < w(x)$ لأجل $a \leqslant x < \xi$. لنفرض مؤقتاً أن $\varphi(x,\lambda) < w(x)$ ليست صحيحة مهما كانت x من J . عندئذ يوجد قيمة أولى x_0 يكون عندها $\varphi(x_0,\lambda) = w(x_0)$. في هذه الحالة يكون :

$$\frac{\varphi(x_0,\lambda) - \varphi(x_0 - h,\lambda)}{h} > \frac{w(x_0) - w(x_0 - h)}{h}$$

ومنه يكون $\varphi'(x_0,\lambda) \geqslant w'(x_0)$ وهذا يتنافى مع كون $w' > f(x,w)$.

وهكذا نرى أن $\varphi(x,\lambda) < w(x)$ وبشكل خاص يكون $\varphi(b,\lambda) < \epsilon$ وبذلك نكون قد برهنا (ب) .

لاثبات (حـ) نلاحظ أنه بسبب كون p و r موجبين ، فإنه لأجل قيم كبيرة لـ λ يكون :

$$A_0 + B_0 \lambda \sin^2 \varphi \leqslant \frac{1}{p} + (q - \frac{1}{p} + \lambda r) \sin^2 \varphi \leqslant A + \lambda B \sin^2\varphi$$

بفرض أن A_0, B_0, A, B ثوابت موجبة مناسبة ، وعلى هذا يكون :

$$\frac{\varphi'}{A+\lambda B\sin^2\varphi} \leqslant 1 < \frac{\varphi'}{A_0+\lambda B_0\sin^2\varphi}$$

وبالمكاملة من a إلى b (بعد إجراء التعويض $\varphi(x) = s$ وحيث كتبنا $\varphi(x)$ بدلاً من $(\varphi(x,\lambda))$ فإننا نجد :

$$\int_{\alpha}^{\varphi(b)} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \leqslant b-a \leqslant \int_{\alpha}^{\varphi(b)} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s} \qquad (11)$$

لكن k عدداً طبيعياً بحيث يكون $k\pi \leqslant \varphi(b) < (k+1)\pi$. وإذا كاملنا المتراجحة الأولى من π إلى $k\pi$ فقط فاننا نحصل على :

$$b-a \geqslant (k-1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \geqslant (k-1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A+\lambda Bs^2} \geqslant \frac{\gamma (k-1)}{\sqrt{\lambda}}$$

بفرض أن γ ثابت موجب . وهكذ نجد :

$$\frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\lambda} (b-a) \geqslant \pi k - \pi \geqslant \varphi(b) - 2\pi$$

ومنه ينتج $\varphi(b) \leqslant D\sqrt{\lambda}$ لأجل قيم كبيرة لـ λ .

وإذا كاملنا المتراجحة الثانية في (11) من 0 إلى $(k+1)\pi$ فإننا نجد :

$$b-a < (k+1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0\sin^2 s} = 2 (k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s}$$

وبما أن $\sin s \leqslant \frac{1}{2}s$ فإننا نجد :

$$b - a < \frac{2(k+1)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \frac{dt}{A_0 + B_0 \frac{t^2}{4}} = \frac{c(k+1)}{\sqrt{\lambda}}$$

ومنه تنتج المتراجحة الثانية $\varphi(b) \geqslant \delta \sqrt{\lambda}$.

(٢ ــ ٦) مسألة القيم الذاتية : يمكن إعطاء شرط الحد :

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = 0$$

معنى هندسياً . ان هذا الشرط يعني أن المتجهين $(p(a) u'(a), u(a))$ و (α_2, α_1) متعامدان . ومن الواضح أن هناك عدداً وحيداً α يحقق :

$$\alpha_1 \sin \alpha + \alpha_2 \cos \alpha = 0 \qquad 0 \leqslant \alpha < \pi$$

إن α هي الزاوية بين الاتجاه الموجب للمحور ع والمستقيم العمودي على المتجه (α_2, α_1) والمار بنقطة الأصل . وإذا كان $u(x, \lambda)$ حلاً لمسألة القيم الابتدائيــة (4) و (8) بهذه القيمة α فإن $R_1 u = 0$ أيضاً . كذلك كل حل لـ (4) مــع $R_1 u = 0$ هو مضاعف لـ u .

كذلك ان $R_2 u = 0$ عندما وعندما فقط تقع النقطة $(p(b) u'(b), u(b))$ على المستقيم المار بنقطة الأصل والعمودي على المتجه (β_2, β_1) . وإذا عينا الزاوية β بحيث يكون :

$$\beta_1 \sin \beta + \beta_2 \cos \beta = 0 \qquad 0 < \beta \leqslant \pi$$

فإنه ينتج ان لحل مسألة القيم الابتدائية (4) و (8) الخاصة $R_2 u = 0$ اذا وإذا فقط كان $\varphi(b, \lambda) = \beta + n\pi$ بفرض أن n عدد صحيح . وبما أن $\varphi(b, \lambda)$ ،

أستناداً إلى (آ) من (٢ ـ ٥) ، هو دالة متزايدة تماماً لأجل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، وأن مجموعة قيم $\varphi(b,\lambda)$ هي $(0,\infty)$ ، فإن لكل $n \geqslant 0$ يوجد $\lambda = \lambda_n$ بحيث يكون :

$$\varphi(b, \lambda_n) = \beta + nz \qquad n = 0, 1, 2 ..$$

في حين لايوجد لـ $n < 0$ أي قيمة لـ λ مثل هذه . إن الاعداد λ_n هي القيم الذاتية التي نبحث عنها ، وان الدوال .

$$u_n(x) = u(x, \lambda_n)$$

الدوال الذاتية المقابلة . واستناداً إلى (خ) من (٢ ـ ٥) يكون :

$$\delta^2 \lambda_n \leqslant (\beta + \pi n)^2 < D^2 \lambda_n$$

ينتج من ذلك أن :

(آ) السلوك التقاربي : يوجد ثابتان موجبان c و C بحيث يكون :

$$c_n^2 \leqslant \lambda_n \leqslant C_n^2$$

لأجل القيم الكبيرة لـ n .

بهذا نكون قد اثبتنا الجزء الأول من المبرهنة (٢ ـ ٢) . واعتماداً على (د) من (٢ ـ ٥) ينتج أن لـ u_n في (a,b) ، n موضعاً صفرياً تماماً . ذلك انه كي يكون لـ u_n موضعاً صفرياً يلزم ويكفي أن يكون $\varphi(x, \lambda_n) = k\pi$ أو ، إذا رمزنا اختصاراً لـ $\varphi(x,\lambda_n)$ بـ $\varphi_n(x)$ ، $\varphi_n(x) = k\pi$. ولكن :

$$n\pi < \varphi_n(b) = n\pi + \beta < (n+1)\pi \quad \text{و} \quad 0 < \varphi_n(a) - \alpha < \pi$$

واستناداً إلى (د) من (٢ ـ ٥) نأخذ $\varphi_n(x)$ ، بفرض أن $a < x < b$ ،

القيمة $k\pi$ مرة واحدة تماماً لأجل $k = 1, ..., n$ ولكنها لاتأخذ هذه القيمة لأجل قيم أخرى k من $\mathbb{Z}$.

وأما فيما يتعلق بأوضاع المواضع الصفرية فإننا نورد المبرهنة التالية :

(٢ ـ ٧) مبرهنة : لتكن J فترة كيفية وليكن :

$$0 < p(x) \in C^1(J) \ , \ q(x) \in C^0(J) \ , \ u,v \in C^2(J)^{(*)}$$

وليكن L المؤثر المعرف في (2) . فإذا كان $x_0 , x_1 \in J$ موضعين صفريين لـ v متتاليين (أي أن $v \neq 0$ في (x_0 , x_1)) ، وإذا كان :

$$\frac{Lu}{u} \leqslant \frac{L\,v}{v}$$

في نقط (x_0,x_1) حيث يكون $u(x) \neq 0$ ، فعندئذ تصح إحدى الحالتين :

(آ) $u = c\,v$

(ب) لـ u موضع صفري في (x_0 , x_1) .

البرهـــان : إذا لم تصح الحالة (ب) فإن $u \neq 0$ و $v \neq 0$ في $J_0 = (x_0,x_1)$. ونستطيع هنا أن نفرض أن $u > 0$ و $v > 0$ في J_0 فيكون :

$0 \leqslant u\,L\,v - v\,L\,u = (pw)'$ بفرض أن $w = u\,v' - v\,u'$

ثم أن $w(x_0) \geqslant 0$ لأن $v(x_0) = 0$ و $v'(x_0) \geqslant 0$ وأن $w(x_1) \leqslant 0$.

وحيث أن $p\,w$ متزايدة تماماً فإن $w(x) = 0$. إذن :

(*) $C^k(J)$ هي مجموعة جميع الدوال المعرفة على الفترة J ولها هناك مشـــتقات مستمرة من المرتبة k

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{1}{u^2} w \Rightarrow \frac{u}{v} = const$$

وهذه هي الحالة (آ) .

(٢ ــ ٨) نتائج . مبرهنة الفصل لشتورم : ضمن الفروض العامة في (٢ - ٧) ، وبشكل خاص بفرض أن J فترة كيفية نستنتج مايلي :

(آ) إذا لم يكن u حلاً بـدهياً لـ $Lu = 0$ ، فإن لـ u مواضع صفرية بسيطة منتهية أو عدودة . وإذا كانت هذه المواضع عدودة فليس لهـا نقطة تجمع في J .

لأنه إذا كان $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ فإنه ينتج عن مبرهنة وحدانية الحل أن $u \equiv 0$. وإذا كان $u(x_k) = 0$ (بفرض أن k عـدد طبيعي) ، وكان $x_k \to ع \in J$ فإنه ينتج بمحاكمة بسيطة أن $u(ع) = u'(ع) = 0$ وبالتـالي فإن $u \equiv 0$.

(ب) خاصة الفصل . نقول عن المواضع الصفرية لـ u و v إنها تتبادل الفصل فيما إذا كان بين كل موضعين لـ u موضع صفري لـ v وبالعكس .

(جـ) مبرهنة الفصل لشتورم . إذا كان u_1, u_2 حلين مستقلين خطياً لـ $Lu = 0$ فإن المواضع الصفرية لهما تتبادل الفصل .

ذلك لأنه إذا كان u حلا لـ $Lu = (pu')' + qu = 0$ ، وكان v حلاً غير بدهي لـ :

$$L_0 v = (pv')' + q_0 v = 0 \qquad q_0(x) \leqslant q(x)$$

فإن بين كل موضعين صفريين لـ v موضعاً صفرياً لـ u .

ينتج الجزء الاول مباشرة من (٢ — ٧) ، وينتج الجزء الثاني كذلك بسبب $\frac{Lu}{u} = 0$ و $\frac{Lv}{v} = q - q_0 \geqslant 0$.

(د) ينتج بشكل خاص عن (حـ) أن بين كل موضعين صفريين لحـل $u(x, \lambda)$ لـ (4) موضعاً صفرياً $u(x, \lambda')$ عندما $\lambda < \lambda'$. وبذلك نكون قد اثبتنا القضية الاخيرة من (٢ — ٢) .

(٢ — ٩) الاهتزاز : نفرض جميـع الدوال ذات قيم حقيقية . نقول عن حل لـ $Lu = 0$ انه مهتز (أو له سلوك اهتزازي) في J ، إذا كان لـ u عـــدد عدود من المواضع الصفرية في J . واستناداً إلى (آ) من (٢ — ٨) ان هـذه الحالة لاتحدث إلا إذا كان J غير متراص . يقال في هذه الحالة أيضاً أن المعادلة $Lu = 0$ اهتزازية . ذلك لانه استناداً إلى (حـ) من (٢ — ٨) فإن كل حل « غير بدهي » مهتز إذا كان أحد الحلول مهتزاً .

ان مبرهنة الفصل التي تحدثنا عنها قبل قليل ذات أهمية كبيرة في تحديد السلوك الاهتزازي عملياً ، فاستناداً الى هذه المبرهنة يكون :

« آ » اذا كانت $L_0 u = (pu')' + q_0(x) u$ اهتزازية وكان $q(x) \geqslant q_0(x)$ فإن $Lu = (pu')' + qu = 0$ اهتزازية .

وكتطبيق على ذلك نبرهن :

« ب » ان معادلة بسل التفاضلية $x^2 u'' + x u' + (x^2 - \alpha^2) u = 0$ اهتزازية في $(0, \infty)$ مهما كان العدد الحقيقي α .

ذلك لاننا اذا ادخلنا المتغير الجديد $s = \log x$ وكتبنا $w(s) = u(e^s)$ فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$L\,w = w'' + (e^{2s} - \alpha^2)\,w = 0$$

بفرض ان الاشتقاق هو بالنسبة لـ s . واذا وضعنا :

$$L_0\,v = v'' + v = 0$$

فاننا نحصل ، استناداً الى (آ) ، على المطلوب وذلك لان $q(s) = e^s - \alpha^2 \geqslant q_0(s) = 1$ لاجل $s \geqslant s_0$. يمكننا أن نصل (في الحالة التي نحن بصددها مثلا) وبالاعتماد على (ح) من (٢ — ٨) ، إلى تحديد أفضل للبعد بين المواضع الصفرية فيما اذا وضعنا :

$$L_0\,v = v'' + \lambda^2\,v$$

بـ λ مناسبة ، كمسألة مقارنة .

(٢ — ١٠) — مبرهنة السعة لتكن J فترة كيفية وليكن $p, q \in C^1(J)$ ، بفرض أن $p > 0$ و $q > 0$. فإذا كان u حلا غير بـدهي لـ $L\,u = (p\,u')' + q\,u = 0$ ، وكان $x_k < x_{k+1}$ موضعين قصويين لـ u فإن :

$$|u(x_k)| \gtreqless |u(x_{k+1})| \quad \text{فيما إذا كان} \quad (pq)' \lesseqgtr 0$$

أي ان السعات تنقص أو تزيد حسبما يكون pq متزايداً أو متناقصاً .

وللاثبات نشتق الدالة :

$$y(x) = u^2 + \frac{1}{p\,q}\,(p\,u')^2$$

فنحصل على :

$$y' = 2u\,u' - \frac{(pq)'}{(pq)^2}\,(pu')^2 + \frac{2\,p\,u'}{p\,q}\,(-qu) = -(pq)'\left(\frac{u'}{q}\right)^2$$

فإذا كان $(pq)' \geqslant 0$ أو $\leqslant 0$ فإن y متناقص أو متزايـــد . ولكن $u'(x_k) = 0$ ، وبالتالي فإن $y(x_k) = u^2(x_k)$ و $y(x_{k+1}) = u^2(x_{k+1})$ ومنـــه نحصل على المطلوب .

مثال : ان سعات دوال بسل في $(0, \infty)$ متناقصة وذلك مهما كان العدد الحقيقي α . وهذا ينتج عن المعادلة التي مرت معنا في (ب) من (٢ — ٩) بعـد التحويل ، حيث يكون $p(s) = 1$ و $q(s) = e^{2s} - \alpha^2$ ، انما فقط عندما $s > \log|\alpha|$. اما اذا كان $s \leqslant \log|\alpha|$ فلا توجد قيم قصوى .

أما اثبات مبرهنة النشر (٢ — ٣) فسنجدها في البند القادم .

(٢ — ١١) تمارين (١) لتكن لدينا مسألة القيم الذاتية :

$$u'' + \lambda u = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u'(0) \qquad u(1) = 0$$

أوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية واثبت أن :

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi + \beta_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

حيث أن β_n يتناقص الى الصفر عندما $n \to \infty$. ارسم u_0 و u_1

(٢) أوجد القيم والدوال الذاتية للمسألة السابقة بعد أن نستبدل بشروطها الحدية الشروط التالية :

$$u(0) = u'(0) \qquad u(1) = u'(1)$$

(٣) حل مسألة القيم الذاتية :

$$(xu')' + \frac{\lambda}{x} u = 0$$

هل $\lambda = 0$ قيمة ذاتية ؟

(٢ ـ ١٢) مبرهنة الاهتزاز لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$u'' + q(x)\, u = 0$$

ولنفرض أن $q(x)$ مستمر لاجل $x \geqslant \alpha$ وأنه يحقق أحد الشرطين التاليين :

(آ) $$\int_{a}^{\infty} q(x)\, dx = \infty \quad , \quad q(x) \geqslant 0$$

(ب) $$\int_{a}^{\infty} | q(x) - \alpha |\, dx < \infty \qquad \alpha > 0$$

عندئذ تكون المعادلة التفاضلية اهتزازية ، ويكون كل حل في الحالة (ب) محدوداً .

نترك البرهان كتمرين ، حيث يمكن في الحالة (ب) أن نفرض أن $\alpha = 1$ (دون أن نمس عمومية المسألة) . استخدم تحويل بروفر ، فيكون استناداً إلى (6) :

$$\varphi' = \cos^2 \varphi + q(x) \sin^2 \varphi$$

وهنا علينا أن نثبت $\varphi(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$. أما في الحالة (آ) فإن φ رتيب وعلى المرء أن يفترض جدلا أن ليس لـ φ نهاية منتهية c ويصل الى تناقض (ندرس الحالة $c = k\pi + \frac{\pi}{2}$ وحدها) . استخدم في الحـــالة (ب)

المتباينة $|q-1| -1 \geqslant \varphi'$. إن محدودية الحل تنتج عن (7) .

وكي نستطيع تطبيق مبرهنة الاهتزاز في الحالة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ، نحتاج إلى مايلي :

(٢ ـ ١٣) صيغ تحويل (آ) إن المعادلة التفاضلية :

$$u'' + a_1(x)\ u' + a_0(x)\ u = h(x)$$

تنتقل بالتحويل :

$$v(x) = u(x)e^{A(x)} \qquad A(x) = \tfrac{1}{2} \int a_1(x)\ dx$$

إلى المعادلة التفاضلية :

$$v'' + (a_0(x) - \tfrac{1}{2} a_1'(x) - \tfrac{1}{4} a_1^2(x))v = h(x)e^{A(x)}$$

(ب) ان المعادلة التفاضلية :

$$(p(x)u')' + q(x)\ u = h(x)$$

تنتقل بادخال متغير جديد t معطى بـ :

$$t = t(x) = \int \frac{dx}{p(x)}$$

إلى المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + p(x)\ q(x)\ v = p(x)\ h(x)$$

بفرض أن $v(t) = u(x(t))$

ونترك على شكل تمرين مايلي :

(حـ) حول المعادلة التفاضلية :

$$x^2 u'' - u' + x^3 u = 0$$

معتمداً على التحويلين (آ) و (ب)

(٢ ـ ١٤) تمارين : (آ) عين جميع حلول المعادلة التفاضلية :

$$u'' + \frac{\alpha}{x^2} u = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(يستفاد من التحويل $x = e^t$) . عين قيم α التي تجعل المعادلة التفاضلية اهتزازية واعتماداً على مبرهنة الفصل اثبت :

(ب) مبرهنة الاهتزاز : إن المعادلة التفاضلية :

$$u'' + q(x)\, u = 0$$

(بفرض أن $q(x)$ صفر عندما $x \geqslant a$) اهتزازية في $[a, \infty)$ عندما يكون $\liminf_{x \to \infty} x^2 q(x) > \frac{1}{4}$ وانها غير اهتزازية عندما $\limsup_{x \to \infty} x^2 q(x) < \frac{1}{4}$

٣ ـ المؤثرات المتراصة المتقارنة ذاتياً في فضاء هلبرت : مبرهنة النشر .

سنبدأ هذا البند في الحديث عن نظرية القيم الذاتية للمؤثرات المتراصة المتقارنة ذاتياً في فضاء هلبرت ثم نستخدم النتائج في مسألة القيم الذاتية لشتورم ـ ليوفيل .

(٣ ـ ١) الجداء السلمي . نفهم من الجداء السلمي في فضاء خطي H حقيقي أو عقدي ، تطبيقاً من $H \times H$ في $\mathbb{R}$ أو C بالخواص التالية :

$$(\lambda f + \mu g, h) = \lambda (f, h) + \mu (g, h) \qquad \text{(الخطية)}$$

(التناظر)　　$(f, g) = \overline{(g, f)}$

« القطعية »　　$(f, f) > 0$ عندما $f \neq 0$

وذلك مهما كانت f, g, h من H ومهما كانت السلميتان λ و μ (من $\mathbb{R}$ أو من C) .

ينتج عن الخاصة الثانية « والتي تسمى في الحالة العقدية خاصة هرميت » أن (f, f) موجب دوماً وأن :

$$(f, \lambda g + \mu h) = \bar{\lambda}(f, g) + \bar{\mu}(f, h)$$

وهذا يعني أنه في الحالة الحقيقية يكون الجداء السلمي ثنائي الخطية .

ان ماسنذكره فيما يلي سيكون صحيحاً سواء في الحالة الحقيقية أو الحالة العقدية ، حتى ولو لم نشر إلى ذلـــك . سنقدم الاثبات في الحالة العقدية وهو يصح في الحالة الحقيقية أيضاً .

نعرف في الفضاء الخطي H نظيماً بـ .

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

وبسهولة نستطيع ان نثبت خصائص النظيم . لاثبات متباينة المثلث مثلا نرى أنه مهما كان f و g من H

$$0 \leqslant (f + \lambda g, f + \lambda g) = (f, f) + \lambda(g, f) + \bar{\lambda}(f, g) + \lambda \bar{\lambda}(g, g)$$

وإذا وضعنا هنا $\lambda = -\frac{(f, g)}{\|g\|^2}$ فإننا نجد بحسابات بسيطة أن :

« متباينة شفارتز »　　$|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$

وعلى هذا فإن :

$$(f+g\,,\,f+g) = (f,f) + (f,g) + (g\,,f) + (g,g)$$
$$= (f\,,f) + 2\,\|f\|\cdot\|g\| + (g,g) = (\|f\| + \|g\|)^2$$

ومنه تنتج متباينة المثلث :

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

يمكن للمرء أن يثبت بسهولة :

« مساواة متوازي الاضلاع » $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\,\|f\|^2 + \|g\|^2$

« مبرهنة فيثاغورث » $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ إذا كان $(f\,,g) = 0$

(٣ـ ٢) **الفضاء قبل الهيلبرتي والفضاء الهيلبرتي** . نسمي كل فضاء خطي مع الجداء السلمي فضاء قبل الهيلبرتي . ان هذا الفضاء مع النظيم المعرف بالجداء السلمي هو فضاء منظم . وإذا كان هذا الفضاء المنظم تاماً ، أي فضاء باناخي ، فإنه يسمى فضاء هيلبرتياً . وهذه بعض الأمثلة :

« آ » ان $\mathbb{R}^n$ المعرف عليه الجداء السلمي :

$$(a\,,b) = a_1\,b_1 + \ldots + a_n b_n$$

هو فضاء هيلبرتي حقيقي ، وان C^n المعرف عليه الجداء السلمي :

$$(a\,,b) = a_1\,\overline{b_1} + \ldots + a_n\,\overline{b_n}$$

هو فضاء هيلبرتي عقدي ، والنظيم في كل من هاتين الحالتين هو نظيم اقليدس .

« ب » لتكن H المجموعة $C\,(J)$ المكونة من جميع الدوال $f(x)$ ذات القيم

الحقيقية والمستمرة في $J : a \leqslant x \leqslant b$. ولنأخذ الجداء السلمي :

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx \qquad (1)$$

ونعرف المسافة بين دالتين f و g من هذا الفضاء بـ :

$$\| f - g \| = \sqrt{\int_a^b (f - g)^2 dx} \qquad (2)$$

ومن السهل علينا أن نثبت أن هـذا الجداء السلمي يحقق الشروط المطلوبة . وحيث أنه توجد متتاليات من الدوال $f_n \in C(J)$ تشكل ، وفق النظيم (2) ، متتالية كوشية ، ولكنها ليست متقاربة إلى دالة مستمرة مثل المتتالية :

$$f_n(x) = \left\{ \max\left(x , \frac{1}{n} \right) \right\}^{-1/3} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

التي نهايتها ، وفق النظيم (2) هو الدالة $x^{-1/3}$ التي لاتنتمي إلى H ، فإن هذا الفضاء الحقيقي هو فضاء قبل الهيلبرتي .

وإذا ما أراد المرء أن يجعل من هذا الفضاء تاماً فعليه أن يضيف دوالاً أخرى تعاني انقطاعاً ، وهذا يقودنا إلى :

(ح) الفضاء الهيلبرتي الحقيقي $L^2(J)$ للدوال الكمولة تربيعياً في J ، أي التي يكون فيها التكاملان :

$$\int_a^b f^2(x) dx \quad و \quad \int_a^b f(x) dx$$

موجودين ، والتي نعرف فيها الجداء السلمي (1) . إن التكاملات الواردة هنا هي تكاملات لوبيغ .

(د) كذلك تشكل الدوال ذات القيم العقدية المستمرة في J أو الكمولة تربيعياً ، فضاء عقدي قبل الهيلبرتي أو هيلبرتي بفرض أن الجداء السلمي معرف بـ :

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$$

وهنا نود أن نلفت النظر إلى أن الدراسة التي سنقوم بها والتي تتعلق بمسألة القيم الذاتية لشتورم وليوفيل ستتم دون تكامل لوبيغ ، أي في مجال الدوال المستمرة . وبشكل ادق في فضاء قبل هيلبرتي .

(ه) تمرين : اثبت أن الجداء السلمي هو دالة مستمرة من $H \times H$ إلى C أو إلى R .

(٣ ـ ٣) النظم المتعامدة المنظمة ومتسلسلات فورييه . ليكن H ، كما سنفرض دائماً ، فضاء قبل هيلبرتي حقيقي أو عقدي . نقول عن متتالية $(w_n)_0^\infty$ من H انها نظام متعامد منظم فيما إذا كان :

$$(w_m , w_n) = \delta_{mn}$$

وإذا كان f عنصراً من H فإننا نسمي المتسلسلة :

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \, w_i \quad \text{بفرض أن} \quad c_i = (f, w_i) \qquad (3)$$

متسلسلة فورييه المولدة بـ f ، وتسمى c_i معاملات فورييه لـ f . وأما فيما يتعلق بتقارب هذه المتسلسلة وبمجموعها فاننا نورد مايلي :

إذا كان :

$$g_n = f - \sum_{i=o}^{n} c_i \, w_i \qquad (4)$$

فإن :

$$\| g_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{i=o}^{n} \overline{c_i}(f, w_i) - \sum_{i=o}^{n} c_i \, (w_i, f)$$

$$+ \sum_{i,j=o}^{n} c_i \overline{c_j}(w_i, w_j) = \| f \|^2 - \sum_{i=o}^{n} | c_i |^2 \qquad (5)$$

وبالتالي يكون :

(آ)

$$\sum_{i=o}^{\infty} | c_i |^2 = \sum_{i=o}^{\infty} | (f, w_i) |^2 \leqslant \| f \|^2 \qquad (6)$$

(متباينة بسل)

مهما كان f من H .

« ب » تشكل المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه (3) متتالية كوشيه . وبالتالي إذا كان H فضاء هيلبرتياً فإن متسلسلة فوريية (3) متقـــاربة ، أي أن متتالية المجاميع الجزئية متقاربة ، وفق النظيم ، إلى عنصر من H .

« حـ » تصح المساواة :

$$f = \sum_{i=o}^{\infty} c_i \, w_i$$

« وفق النظيم » إذا واذا فقط صحت إشارة المساواة في (6) . وإذا كان

هذا هو الحال مهما كان f من H فإننا نقول عن (w_n) انها نظام متعامد منظم تام أو أنها قاعدة متعامدة منظمة . تنتج « آ » و « ب » مباشرة من (5) ، ولاثبات « ب » نفرض S_n هو مجموع جزئي نوني لمتسلسلة فورييه (3) . فإذا كان $m < n$ فإن :

$$\| s_n - s_m \|^2 = \sum_{i,j=m+1}^{n} c_i \overline{c_j} (w_i , w_j) = \sum_{i=m+1}^{n} | c_i |^2$$

وبسبب تقارب المتسلسلة (6) فإن (s_n) متتالية كوشية .

« د » **مثال** : تشكل الدوال :

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad w_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad w_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad (n \in N)$$

نظام متعامد منظم في فضاء المثال « ب » أو المثال « حـ » من « ٣ - ٢ » حيث تأخذ $J = [0,2\pi]$.

وتشكل الدوال :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

نظاماً متعامداً منظماً في فضاء المثال « د » من « ٣ - ٢ » بفرض أن $J = [0 , 2\pi]$.

ونترك القارىء برهان مايلي :

« هـ » تشكل المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i w_i$ متتالية كوشية اذا واذا

فقط كانت المتسلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^2$ متقاربة . إن هذا الشرط في فضاء هيلبرت هو شرط لازم وكاف لتقارب المتسلسلة .

(و) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i w_i$ متقاربة إلى عنصر f من H فإن $\alpha_i = (f, w_i)$ ، وبعبارة أخرى ان كل متسلسلة متقاربة هي متسلسلة فورييه لمجموعها . وبشكل خاص يكون .

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i w_i = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i w_i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in N$$

(٣ ـ ٤) المؤثرات المحدودة والمتراصة والمتقارنة ذاتياً : ليكن H فضاء قبل هيلبرتي حقيقي أو عقدي وليكن $T{:}H \rightarrow H$ مؤثراً خطياً . نقول عن T انه محدود إذا كان نظيم T :

$$\| T \| = \sup \{ \| T f \| : f \in H \ , \| f \| = 1 \}$$

منتهياً . عندئذ يكون :

$$\| T f \| \leqslant \| T \| . \| f \| \qquad f \in H \qquad (7)$$

وإذا كان T خطياً ومحدوداً وكان :

$$(T f , g) = (f , T g) \qquad f , g \in H$$

فإننا نقول عن T انه متقارن ذاتياً أو هرميتياً .

ونقول عن مؤثر خطي T انه متراص إذا كان لكل متتالية $(T f_n)$ ، مهما كانت المتتالية المحدودة (f_n) من H ، متتالية جزئية متقاربة (بنهاية في H) .

ويمكن للمرء أن يتحقق بسهولة من أن كل مؤثر خطي متراص محدود .

(آ) مهما كان المؤثر الهرميتي T ومهما كان العنصر f من H فإن (Tf , f) حقيقي وان :

$$\|T\| = \sup \{ | (Tf, f) | : f \in H , \|f\| = 1 \}$$

البرهـــان : لنرمز للطرف الأيمن من هذه المساواة بـ β فعندئذ يكون :

$$| (Tf, f) | \leqslant \beta \|f\|^2 \qquad f \in H \tag{8}$$

واستناداً إلى (7) وإلى متباينة شفارتز يكون :

$$| (Tf, f) | \leqslant \|Tf\| \leqslant \|T\|$$

لأجل $\|f\| = 1$. إذن $\beta \leqslant \|T\|$ ويتم اثبات المتباينة المعكوسة اعتماداً على المتطابقة :

$$(Tf+Tg, f+g) - (Tf - Tg, f-g) = 2(Tf, g) + 2(Tg, f)$$

ويكون الطرف الأيسر استناداً إلى (8) وإلى مساواة متوازي الاضلاع أصغر من :

$$\beta \|f+g\|^2 + \beta \|f-g\|^2 = 2\beta (\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

وإذا وضعنا بشكل خاص $f = \lambda h$ و $g = Th$ بفرض أن $\|h\|=1$ و $\lambda = \|Th\|$ فإن :

$$2(Tf, g) + 2(Tg, f) = 2\lambda (Th, Th) + 2\lambda (T^2 h, h) = 4\lambda^3$$

إذن :

$$4\lambda^3 \leqslant 2\beta (\lambda^2 + \lambda^2) \Rightarrow \lambda = \|Th\| \leqslant \beta$$

ولما كان h باستثناء $\|h\|=1$ كيفياً فإن $\|T\| \leqslant \beta$ ، وبالتالي $\|T\|=\beta$

(٣ ـ ٥) القيم الذاتية للمؤثرات الهرميتية المتراصة : إذا كان :

$$Tw = \mu w \qquad 0 \neq w \in H \tag{9}$$

فعندئذ تسمى μ قيمة ذاتية T ويسمى w العنصر الذاتي الموافق .

وللحصول على قيمة ذاتية لمؤثر هرميتي متراص T ننظر ، بفرض $T \neq 0$ ، في متتالية (φ_n) من H تحقق :

$$\|\varphi_n\| = 1 , \quad |(T\varphi_n , \varphi_n)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|T\|$$

وإذا انتقلنا ، إن كان ضرورياً ، إلى متتالية جزئية فإننا نفرض أيضاً أن كلا من المتتالية $(T\varphi_n)$ والمتتالية الحقيقية $(T\varphi_n, \varphi_n)$ متقارب (T متراص) :

$$(T\varphi_n , \varphi_n) \to \mu \qquad T\varphi_n \to \mu w$$

إن μ حقيقي وإن $0 < \|T\| = |\mu|$. ويكون عندئذ :

$$0 \leqslant \|T\varphi_n - \mu\varphi_n\|^2 = \|T\varphi_n\|^2 - 2\mu(T\varphi_n , \varphi_n) + \mu^2$$

$$\leqslant 2\mu^2 - 2\mu(T\varphi_n, \varphi_n) \to 0$$

أو :

$$\|\epsilon_n\| \to 0 \text{ وأن } \epsilon_n \in H \text{ بفرض أن } T\varphi_n = \mu\varphi_n + \epsilon_n$$

ولما كان $T\varphi_n \to \mu w$ فإن $\mu\varphi_n \to \mu w$ اي $\varphi_n \to w$ وبالتالي $T\varphi_n \to Tw$.
وتصح كذلك المساواة (9) ويكون $\|w\| = 1$

(٣ ـ ٦) مبرهنة . إذا كان T مؤثراً هرميتياً متراصاً في فضاء قبل هيلبرتي H ، فعندئذ توجد قيمة ذاتية $\mu_0 \in \mathbb{R}$ تحقق $\| T \| = | \mu_0 |$. إن للعنصر الذاتي الموافق $w_0 \in H$:

$$Tw_0 = \mu_0 w_0 \qquad \| w_0 \| = 1$$

الخاصة التالية وهي أن العبارة $| (Tw,w) |$ تبلغ قيمتها العظمى $\| T \|$ على سطح كرة الواحدة في النقطة w_0 .

لقد تم اثبات هذه المبرهنة في (٣ ـ ٥) عندما $T \neq 0$. أما إذا كان $T = 0$ فهي بدهية .

لنلاحظ انه من (9) ينتج : $(Tw,w) = \mu \| w \|^2$ أي أن $| \mu | \leqslant \| T \|$ مهما كانت القيمة الذاتية μ وان كل قيمة ذاتية (بفرض أن T هرميتي) حقيقية .

لننظر الآن في الفضاء الجزئي H_1 لجميع العناصر $f \in H$ المتعامدة مع w_0 :

$$H_1 = \{ f \in H \ , \ (f, w_0) = 0 \}$$

ومن الواضح أن H_1 ينتقل بـ T إلى نفسه لأن :

$$(T f, w_0) = (f, T w_0) = \mu_0 (f, w_0) = 0 \qquad f \in H_1$$

وأن T هرميتي في H_1 ومتراص .

يمكن إعادة الدراسة نفسها في H_1 فنصل إلى قيمة ذاتية μ_1 وإلى عنصر ذاتي w_1 يحققان :

$$| \mu_0 | \geqslant | \mu_1 | \ , \ (w_0 , w_1) = 0 \qquad \| w_1 \| = 1$$

ليكن الآن H_2 فضاء جزئياً مكوناً من جميع العناصر f من H ، المتعامدة

مع كل من w_0 و w_1 وهكذا .

إن هذه العملية لاتتوقف إذا كان H غير منتهي البعد وذلك لأن الفضاء الجزئي H_n المكون من العناصر f التي تحقق :

$$H_n : (f.w_i) = 0 \qquad i = 0,1, \ldots, n-1$$

لايساوي {0}

(٣ — ٧) مبرهنة : ليكن H فضاء قبل هيلبرتي لانهائي الابعاد وليكن $T: H \to H$ هرميتياً ومتراصاً . عندئذ يكون لمسألة القيم الذاتية (9) عدد غير منته من القيمة الذاتية الحقيقية $\mu_0, \mu_1, \ldots$ التي تحقق :

$$|\mu_0| \geqslant |\mu_1| \geqslant |\mu_2| > \ldots \qquad (10)$$

$\mu_n \to 0$ عندما $n \to \infty$

وتشكل العناصر الذاتية المقابلة w_n :

$$T w_n = \mu_n w_n$$

نظاماً متعامداً منظماً :

$$(w_m, w_n) = \delta_{m,n}$$

وإذا كان H_n فضاء جميع عناصر f من H التي تحقق :

$$(f,w_i) = 0 \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

فإن :

$$|\mu_n| = \sup \|Tf\| = \sup |(Tf,f)| \qquad (f \in H_n, \|f\| = 1) \qquad (11)$$

إن كل عنصر من فضاء الصورة لـ T يمثل بتسلسلة فوريية الخاصة به . أي انه إذا كان $h = Tf$ وبفرض أن f عنصر من H فإن :

$$(12) \qquad h = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \, w_i \quad \text{بفرض أن} \quad d_i = (h, w_i) = \mu_i \, (f, w_i)$$

لقد تم اثبات هذه المبرهنة ، باستثناء (12) وعلاقة النهاية في (10) ، بالملاحظات الاخيرة . اما أن تشكل μ_n متتالية صفرية فهذا واضح لأنه اذا لم يكن الأمر كذلك فإن المتتالية $\psi_n = \frac{1}{\mu_n} w_n$ تكون عندئـــذ محدودة ويكون للمتتاليـــة $(T\psi_n) = (w_n)$ متتالية جزئية متقاربة الأمر الذي يستحيل أن يكون صحيحاً بسبب كون $\| w_n - w_m \|^2 = 2$ عندما $m \neq n$.

ولاثبات (12) نفرض $c_i = (f, w_i)$ معاملات فوريه لـ f ونأخذ :

$$g_n = f - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \, w_i$$

من الواضح أن g_n عنصر من H_n وانـــه استناداً الى (11) و (5) و (10) يكون :

$$\| Tg_n \| < | \mu_n | \cdot \| g_n \| \leqslant | \mu_n | \cdot \| f \| \to 0$$

وينتج المطلوب عندئذ من المساواة :

$$h - \sum_{i=0}^{n-1} d_i \, w_i = Tg_n$$

(٣ ــ ٨) اضافات وملاحظات : (آ) ان كل قيمة ذاتية $\mu \neq 0$ لـ T مساوية لاحدى القيم μ_n ، وان الفضاء الذاتي الموافق (اي مجموعة جميـع العناصر w من H التي تحقق المعادلة (9)) منتهي البعد ويتولد من العناصر الذاتيـة w_k

الموافقة لـ $\mu = \mu_k$. وبعبارة اخرى اذا كان w حلا لـ (9) لأجل $\mu \neq 0$ فإن w يقع في الفضاء الصورة لـ T ، أي أن :

$$w = \sum c_i w_i \text{ بفرض أن } c_i = (w, w_i) \text{ و } T w = \sum c_i \mu_i w_i$$

ويكون اعتماداً على (9) وعلى (و) من (٢ – ٣) $\mu c_i = \mu_i c_i$. فإذا كان $\mu \neq \mu_i$ مهما كانت i فإن $c_i = 0$ و $w = 0$. أما اذا كان $\mu = \mu_n$ فـإن $c_i = 0$ لجميع قيم i التي يكون من أجلها $\mu \neq \mu_i$ ويكون $w = \sum c_k w_k$ حيث يمتد المجموع على جميع قيم k التي يكون لاجلها $\mu = \mu_k$.

(ب) ان العنصر الذاتي w_n هو حل لمسألة تحولات

$$|(Tf, f)| = \max .$$

بشرط جانبي $\|f\| = 1$ و $(f, w_i) = 0$ لأجل $i = 0, \ldots, n-1$

(هـ) اذا كان H فضاء هيلبرتياً واذا لم يكن $\mu = 0$ قيمة ذاتية لـ T فإن (w_n) قاعدة متعامدة منظمة ، أي أنه مهما يكن f من H يكون :

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i w_i \text{ بفرض أن } c_i = (f, w_i)$$

ذلــك لان الطرف الأيمن من هذه المعادلة (أي متسلسلة فوريه لـ f) متقارب استناداً الى « ب » من « ٣ – ٣ » ويساوي مثلا g . واستناداً الى (9) من « ٣ – ٣ » يكون ايضاً $c_i = (g, w_i)$. وبذلك يكون لـ Tf و لـ Tg معاملات فوريه $\mu_i c_i$ نفسها . وهي متساوية استناداً الى القضية « 12 » . وينتج من $T(f-g) = 0$ ، نظراً لأن الصفر ليس قيمة ذاتية لـ T ، أن $f = g$.

لننتقل الآن الى تطبيق هذه النتيجة على مسألة القيم الذاتية لشتورم ـ ليوفيل .

(٣ ـ ٩) مسألة القيم الذاتية لشتورم ـ ليوفيل : لتكن لدينا المسألة :

$$J = [a,b] \text{ في } Lu + \lambda r u = 0$$

$$R_1 u = R_2 u = 0 \qquad (13)$$

حيث يكون :

$$Lu = (pu')' + qu \,,\; R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a)$$

$$R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b)$$

وذلك ضمن الفروض (SL) التي مرت في (٢ ـ ١) . يمكننا أن نقبل أن $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية ، وذلك لأنه إذا لم تكن λ^* ، مثلا ، قيمة ذاتية فإننا نستبدل بـ $q(x)$ ، $q^*(x) = q(x) + \lambda^* r(x)$. وإذا كانت (λ_n, w_n) قيماً ذاتية ودوال ذاتية للمسألة القديمة فإن $(\lambda_n - \lambda^*, w_n)$ هي القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة الجديدة ، وبالتالي لايكون الصفر قيمة ذاتية للمسألة الجديدة

يمكن تصور كل حل u لـ (13) على أنه حل لمسألة شتورم نصف المتجانسة في القيم الحدية :

$$Lu = g(x) \qquad g(x) = -\lambda r(x) u(x)$$

$$R_1 u = R_2 u = 0$$

وهذه تحقق استناداً إلى (12) من (١ ـ ٦) المعادلة التكاملية :

$$u(x) = -\lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, r(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \qquad (14)$$

بفرض أن $\Gamma(x,\xi)$ هو دالة غرين لمسألة شتورم في القيم الحدية (4) من البند الأول . ووجود هذا الحل أكدته المبرهنة (١ ـ ٧) نظراً لأن $\lambda = 0$ ليست

قيمة ذاتية (إذا كان $Lu = o$ و $R_1 u = o$ فالحل الصفري هو الحل الوحيد) .

لندخل ، بسبب التناظر ، الدالتين الجديدتين :

$$w(x) = \sqrt{r(x)}\, u(x) \quad , \; K(x,\xi) = -\, \Gamma(x,\xi) \sqrt{r(x)\, r(\xi)} \qquad (15)$$

عندئذ تأخذ (14) الشكل التالي :

$$w(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, w(\xi)\, d\xi \qquad (16)$$

وهذه معادلة تكاملية بنواة متناظرة :

$$K(x,\xi) = K(\xi,x) \qquad (17)$$

وحول العلاقة بين المسألة الاصلية والمعادلة التكاملية تصح المبرهنة التالية :

(٣ ـ ١٠) مبرهنة : ضمن الفروض (S L) ، وبفرض أن الصفر ليس قيمة ذاتية لـ (13) ، فإنه يلزم ويكفي كي يكون العدد λ قيمة ذاتية وتكون الدالة $u(x)$ دالة ذاتية موافقة هو أن يكون u مستمراً في J وغير مطابق للصفر ومحققاً للمعادلة التكاملية (14) ، أو أن يكون $w = \sqrt{r(x)}\, u$ مستمراً في J وغير مطابق للصفر ومحققاً للمعادلة التكاملية (16) . إن النواة $k(x,\xi)$ هي دالة متناظرة مستمرة في المربع $Q = [a,b] \times [a,b]$.

لقد اثبتنا الجزء الأساسي من هذه المبرهنة بدراستنا السابقة ، ولم يبق امامنا سوى ثغرة بسيطة . ذلك أننا إذا أردنا أن نثبت ان كل حل u لـ (14) هو حل لـ (13) فإن علينا ان نثبت أولا أن $u \in C^2(J)$ ، إذ اننا لم نفرض في u سوى الاستمرار . ان هذا الامر ينتج عن المبرهنة (١ ـ ٧) ، نظراً لان

التكامل في الطرف الايمن من (14) شكل (12) من البند الأول حيث يكون $g = -\lambda vu$ ، ونظراً لان هذا التكامل بفرض أن g مستمر هو فضول باستمرار مرتين كما اثبتنا هناك .

إن مسألة القيم الذاتية الأصلية هي اذن مماثلة لمعادلة فريد هولم التكاملية (16).

ومن المناسب ان نضرب (16) بـ $\frac{1}{\lambda}$ فنحصل على :

$$T f = \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{بفرض ان} \quad T w = \mu w \qquad (18)$$

نكتفي بدراسة هذه المعادلة في الفضاء الحقيقي قبل الهيلبرتي $H = C(J)$ الذي ورد في المثال ب من (٣ - ٢) مستخدمين النتائج السابقة . إن المؤثر T ينقل $C(J)$ إلى نفسه . ولما كانت $\lambda = o$ ليست قيمة ذاتية لـ (13) ، وكانت $\mu = o$ ، كما يبدو بسهولة ، ليست قيمة ذاتية لـ T فإن هناك تقابلا بين القيم الذاتية λ لـ (13) والقيمة الذاتية μ لـ (18) وفق $\lambda = \frac{1}{\mu}$. إن المؤثر T خطي وهرميتي ومتراص . وتنتج الهرميتية من تناظر K وتنتج معها ايضاً الصيغة :

$$(T f, g) = (f, T g) \qquad f, g \in C(J) \qquad (19)$$

واما تراص T فينتج عن المبرهنة التالية :

(٣ - ١١) مبرهنة : إذا كانت (f_n) متتالية من $H = C(J)$ بفرض أن $\| f_n \| < c$ فإن المتتالية :

$$g_n(x) = T f_n = \int_a^b K(x, \xi) f_n(\xi) d\xi$$

تحقق شروط مبرهنة اسكولي ـ ارزيلا ، أي أنها متساوية الاستمرار ومحدودة بالمعنى العادي :

$$| g_n (x) | \leqslant C_1 \qquad x \in J \quad n \in N$$

وهذا يؤدي إلى أن لـ g_n متتالية جزئية متقاربة بانتظام .

البرهـــان : بسبب استمرار $K(x,\xi)$ فإنه إذا كان $\epsilon > o$ مفروضاً فهناك $\delta > o$ بحيث يكون :

$$| K(x , \xi) - K (x',\xi) | < \epsilon \quad \text{عندما} \quad | x - x' | < \delta$$

واستناداً إلى متباينة شفارتز فاننا نجد لـ $g = Tf$ و $\| f \| \leqslant C$

$$| g (x) - g(x') | \leqslant \int_a^b | K (x,\xi) - K (x',\xi) | | f (\xi) | d\xi$$

$$\leqslant (\epsilon , | f |) \leqslant \| \epsilon \| . \| f \| \leqslant C \epsilon \sqrt{b - a}$$

وبهذا نكون قد اثبتنا تساوي الاستمرار . وأما المحدودية فتنتج بشكل أبسط. ان النواة K مستمرة فهي محدودة : $| K (x ,\xi) | \leqslant A$ ، واستناداً إلى متباينة شفارتز ينتج :

$$| g_n (x) | = | (K,f_n) | \leqslant \| K \| C \leqslant AC \sqrt{b - a}$$

وبهذا نكون في وضع نستطيع فيه ان نطبق المبرهنة (٣ ـ ٧) على المؤثر T .

واذا ما اردنا ان ننقل هذه النتائج المتعلقة بـ (16) ، على المعادلة التكاملية الأصلية (14) أو مسألة القيم الذاتية (13) ، فما علينا سوى أن نلاحظ صيغ التحويل (15) . وإذا كان w_i الدالة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية μ_i لـ (16)

فعندئذ تصح (14) لأجل :

$$u_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sqrt{r(x)}} \qquad \lambda_i = \frac{1}{\mu_i} \tag{20}$$

أي :

$$u_i(x) = -\lambda_i \int_a^b \Gamma(x,\xi)\, r(\xi) u_i(\xi)\, d\xi \tag{21}$$

وبالتالي استناداً إلى المبرهنة (١ – ٧)

$$L u_i + \lambda_i r(x) u_i = o \qquad R_1 u_i = R_2 u_i = o \tag{22}$$

$$i = o,1,2, \ldots$$

وأما نشر دالة مفروضة $\varphi(x)$ حسب الدوال الذاتية u_i فإنه ينتج ، اذا أجلنا النظر في موضوع التقارب مؤقتاً ، بنشر $h = \sqrt{r}\,\varphi$ حسب w_i :

$$h(x) = \sum_{i=o}^{\infty} d_i w_i(x) \qquad d_i = (h, w_i) \tag{23}$$

وهذا مكافىء لـ :

$$\varphi(x) = \sum_{i=o}^{\infty} d_i u_i(x) \qquad d_i = \int_a^b r(x) \varphi(x)\, u_i(x)\, dx \tag{24}$$

أي بالنشر الوارد في (٢ – ٣) .

ليكن الآن $\varphi \in C^2(J)$ و $R_1 \varphi = R_2 \varphi = o$ ، فيكون استناداً إلى (12) من البند

الأول أن $\varphi(x) = (\Gamma, L\varphi)$ حيث يعني الجداء السلمي هنا وفيما يلي التكامل بالنسبة لـ ξ مع ترك x كوسيط . لذلك إذا وضعنا $f = -\frac{L\varphi}{\sqrt{r}}$ و $h = \sqrt{r}\,\varphi$ فإن :

$$h(x) = \sqrt{r(x)}\,(\Gamma, -f\sqrt{r}) = (K, f) = Tf$$

وبالتالي فإن h تقع في الفضاء الصورة لـ T وتكون (12) صحيحة أي تكون (23) صحيحة ، على أن نفهم هذه المساواة بمفهوم التقارب بالوسط المربع أي بمفهوم المسافة (2) . سنثبت فيما يلي أن التقارب المنتظم أيضاً قائم في J .

استناداً إلى (12) يكون $d_i = \mu_i c_i$ بفرض أن $c_i = (f, w_i)$. بالاضافة لذلك يمكننا ان ننظر إلى العدد $\mu_i\ w_i\ (x_0)$ ، بفرض x_0 ثابتة ، على أنه معامل فوريه للدالة $K(x_0, \xi)$:

$$\mu_i\, w_i\,(x_0) = (K(x_0, .), w_i)$$

لننظر الآن في مجموع جزئي للمتسلسلة (23) من $i = m$ إلى $i = n$ ، ولنطبق عليه متراجحة شفارتز :

$$\sum_{i=m}^{n} c_i\ \mu_i w_i\,(x_0))^2 < \sum_{i=m}^{n} c_i^2\ \sum_{i=m}^{n} (\mu_i\ w_i\,(x_0))^2$$

واستناداً إلى متباينة بسل يكون مجموع الطرف الأيمن الممتد من o إلى ∞ أصغر من $\|K(x_0, .)\|^2$. كذلك ان المجموع الاول في الطرف الايمن هو مجموع جزئي لمتسلسلة متقاربة . وعلى هذا فانه إذا كان ϵ عدداً موجباً مفروضاً فهناك عدد n_ϵ بحيث يكون :

$$(\sum_{i=m}^{n} c_i \mu_i w_i (x_0))^2 \leqslant \epsilon \| K (x_0 \ .) \|^2 \leqslant A \epsilon$$

عندما يكون $n > m \geqslant n_0$ و $x_0 \in J$.

وبهذا نكون قد اثبتنا التقارب المنتظم للمتسلسلة (23) وللمتسلسلة (24) أيضاً .

وبذلك نكون قد اثبتنا مبرهنة التقارب (٢ — ٣) في الحالة التي يكون فيها $\varphi \in C^2(J)$.

نود أن نذكر أن المبرهنة صحيحة أيضاً عندما يكون $\varphi \in C^1(J)$ غير أننا سنغض النظر عن هذا البرهان .

٤ — السلوك التقاربي - الاستقرار

(٤ — ١) نظرية الاستقرار : إن هدف هذا البند هو الوصول إلى روائز حول الارتباط المستمر لحل المعادلة التفاضلية بالقيم الابتدائية . لننظر على سبيل المثال بالحل $y(t)$ للمسألة :

$$y' = y \qquad y(0) = \eta$$

والحل $z(t)$ للمعادلة نفسها انما بشرط ابتدائي جديد $z(0) = \eta + \epsilon$. عندئذ يكون :

$$z(t) - y(t) = \epsilon e^t$$

وهنا نرى ان تغير القيمة الابتدائية دون أن نغير المعادلة التفاضلية أدى إلى أن الفرق بين الحلين يسعى إلى ∞ مثل e^t .

أما إذا نظرنا إلى المعادلة التفاضلية :

$$y' = -y$$

فإننا نجد أن الفرق بين حلين y و z لقيمتين ابتدائيتين $\eta, \eta+\epsilon$ هو :

$$z(t) - y(t) = \epsilon e^{-t}$$

وهذا يتقارب الى الصفر عندما $t \to \infty$.

(٤ ـ ٢) **الاستقرار والاستقرار المقارب** . سنفرض المتغير t فيما يلي حقيقياً ، بينما يمكن للدوال $f_i, y_i ..$ أن تكون ذات قيم في $\mathbb{R}^n$ أو C^n .

لتكن لدينا مجموعة المعادلات التفاضلية :

$$y'_i = f_i(t, y_1, .., y_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

لنستخدم اسلوب المتجهات بادخال الرموز التالية :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad f(t,y) = \begin{pmatrix} f_1(t,y) \\ \vdots \\ f_n(t,y) \end{pmatrix}$$

عندئذ تأخذ مجموعة المعادلات التفاضلية المذكورة الشكل :

$$y' = f(t, y)$$

ليكن $x(t)$ حلاً للمجموعة (1) لأجل $o \leqslant t < \infty$ ، حيث نفرض أن $f(t,y)$ معرف على الأقل في $S_\alpha : o \leqslant t < \infty, |y - x(t)| < \alpha$ ومستمر . نقول عن حل $x(t)$ انه مستمر إذا تحقق مايلي :

لكل $\epsilon > o$ يوجد $\delta > o$ بحيث تكون جميع الحلول $y(t)$ الموافقة لـ :

$$|y(o) - x(o)| < \delta$$

موجودة لأجل $t \geqslant o$ وتحقق المتباينة :

$$| y(t) - x(t) | < \epsilon \qquad o < t < \infty$$

ونقول عن الحل $x(t)$ انه مستقر متقارب إذا كان مستقراً وإذا وجد $o < \delta$ بحيث تحقق جميع الحلول $y(t)$ الموافقة لـ $| y(o) - x(o) | < \delta$ الشرط :

$$\lim_{t \to \infty} | y(t) - x(t) | = o$$

ونقول عن الحل إنه غير مستمر أو انه قلق إذا لم يكن مستقراً .

ملاحظات : إن النظيم في هذه التعاريف هو نظيم كيفي في $\mathbb{R}^n$ أو C^n . ويمكن للمرء أن يثبت أن النتائج التي نحصل عليها مستقلة عن النظيم الذي نختاره .

ولقد جرت العادة في نظرية الاستقرار أن نبحث في الحالة $t \to +\infty$. أما الحالة $t \to -\infty$ فمن الممكن أن ترجع إلى الحالة السابقة .

(٤ ـ ٣) مبرهنة : إذا كانت لدينا مجموعة المعادلة التفاضلية :

$$y'_i = a_{i1}(t)\, y_1 + \dots + a_{in}(t)\, y_n \qquad i = 1, \dots, n$$

وإذا رمزنا بـ A للمصفوفة :

$$(a_{ij})$$

فإن المجموعة السابقة تكتب بالشكل :

$$y' = Ay \qquad (2)$$

إن الأعداد a_{ij} يمكن أن تكون حقيقية أو عقدية .

لقد رأينا أننا لحل هذه المعادلة نضع :

$$y(t) = c\, e^{\lambda t}$$

فنجد :

$$(A - \lambda E)\, c = o$$

بفرض أن :

$$E = (\delta_{ij})$$

ويكون للمجموعة حل غير الصفري إذا كانت λ حلاً للمعادلة :

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة n في λ تسمى المعادلة المميزة . وتسمى حلولها القيم المميزة للمصفوفة A .

مبرهنة : إذا حققت القيم المميزة λ_i للمصفوفة A المتباينة .

$$\operatorname{Re} \lambda_i < \alpha \qquad (3)$$

فإن (*)

$$|e^{At}| < c e^{\alpha t} \quad \text{لأجل} \quad t \geq 0 \qquad (4)$$

بثابت موجب مناسب c .

إن اثبات هذه المبرهنة ينتج عن الحقيقة التالية : إن للمعادلة التفاضلية (2) n

---

(*) ان $|A|$ هو نظيم المصفوفة A . والنظائم التي نسمح بها تحقق بالاضافة الى شروط النظيم المتباينتين :

$$|AB| \leqslant |A|\,|B| \qquad |Ax| \leqslant |A|\,|x|$$

بفرض ان A و B مصفوفتان و x متجه

حلاً مستقلاً من الشكل :

$$y(t) = e^{\lambda t} p(t) \qquad (5)$$

بفرض أن λ هي قيمة مميزة لـ A و

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ | \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

حدودية من درجة لاتزيد عن n .

فإذا كان $\alpha - Re\,\lambda = \epsilon > 0$. فإن $| p_i(t) | \leqslant c_i e^{\epsilon t}$ وبالتالي :

$$| e^{\lambda t} p_i(t) | \leqslant e^{(\epsilon + Re\,\lambda)t} c_i = c_i e^{\alpha t}$$

وإذا رمزنا بـ $Y(t)$ لنظام أساسي مكون من n حلاً من الشكل (5) ، فإن كلا من مركباته ، والتي عددها n^2 ، لايتجاوز جداء ثابت بـ $e^{\alpha t}$. ان الامر نفسه يصح لأجل $Y(t)$ وبالتالي ، نظراً لأن e^{At} هو أيضاً نظام أساسي يمكن أن يمثل بالشكل $e^{At} = Y(t)C$ لأجل e^{At} .

(٤ ـ ٤) مبرهنة . إن جميع حلول المعادلة التفاضلية الخطية :

$$y' = Ay \qquad (\text{ مصفوفة بعناصر ثابتة } A)$$

تسعى نحو الصفر عندما $t \to \infty$ اذا وإذا فقط كان :

$$Re\,\lambda_i < 0 \qquad (6)$$

وذلك مهما كانت القيمة المميزة λ_i للمصفوفة A .

البرهـان : يمكن كتابة كل حل y على الشكل $y(t) = e^{At} y(o)$. واستناداً

إلى المبرهنة السابقة :

نرى أن $y(t) \to o$ عندما $t \longrightarrow \infty$.

أما إذا وجدت قيمة ذاتية $\lambda = \mu + i\nu$ بحيث يكون $o \leqslant \mu$ ، فعندئذ يوجد للمعادلة التفاضلية حل من الشكل :

$$y(t) = c\, e^{\lambda t} \qquad (o \neq c \in C^n) \qquad (7)$$

وهذا لايسعى إلى الصفر عندما $t \longrightarrow \infty$.

وهكذا نصل إلى المبرهنة التالية :

(٤ ــ ٥) مبرهنة في الاستقرار : لتكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \ (p \leqslant n)$ القيم الذاتية لـ A وليكن $\gamma = \max\{Re\lambda_i \ i = 1, .. p\}$ ، عندئذ يكون الحـــل البدهي $x(t) \equiv o$ للمعادلة (2) :

مستقراً مقارباً عندما $\gamma < 0$

قلقاً عندما $\gamma > 0$

غير مستقر مقارب (يمكن ان يكون مستقراً أو قلقاً) عندما $\gamma = o$

أي انه إذا كان $\gamma > o$ و $\lambda = \mu + i\nu$ قيمة ذاتية بقسم حقيقي موجب ، فإنه توجد حلول $z(t)$ غير محدودة رغم أن $|z(o)|$ يمكن ان تكون صغيرة بقدر كيفي . مثال ذلك الحلول $z = \alpha y(t)$ حيث يعطى y بـ (7) .

أما الحالة $\gamma = o$ فهي لاتعطي حلا مستقراً مقارباً ، الأمر الذي يظهر من (7) إذا وضعنا $\lambda = i\nu$.

وكمثال على الحالة الأخيرة نورد المصفوفتين :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وهنا يكون :

$$e^{At} = E \quad , \quad e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

في المثال الأول نجد حالة الاستقرار وفي المثال الثاني نجد حالة القلق .

ولتوضيح سلوك الاستقرار ، لنظام خطي بمعاملات ثابتة ، تماماً سنوجه اهتمامنا فيما يلي لمسائل غير خطية . وفي بداية الأمر نورد المبرهنة المساعدة التالية :

(٤ ــ ٦) مبرهنة جرونوول : لتكن $\varphi(t)$ دالة حقيقية مستمرة في $J: 0 \leqslant t \leqslant \alpha$ وليكن :

$$\varphi(t) \leqslant \alpha + \beta \int_0^t \varphi(t)\, dt$$

في J وبفرض أن $\beta > 0$. عندئذ يكون في J :

$$\varphi(t) \leqslant \alpha\, e^{\beta t}$$

البرهـــان : ليكن $\epsilon > 0$ ولنضع :

$$\psi(t) = (\alpha + \epsilon)\, e^{\beta t}$$

إن الدالة ψ تحقق المعادلة التفاضلية $\psi' = \beta\psi$ ، فهي تحقق إذن المعـــادلة التكاملية :

$$\psi(t) = \alpha + \epsilon + \beta \int_{0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau$$

لنبرهن الآن أن $\psi > \varphi$ في J . إن هذه المتباينة صحيحة عندما $t = o$. ولنفرض ، مؤقتاً ، أن ادعاءنا خاطىء وأن القيمة τ_0 هي القيمة الأولى التي يكون فيها $\varphi(\tau_0) = \psi(\tau_0)$. عندئذ يكون $\psi \leqslant \varphi$ لأجل $0 \leqslant t \leqslant t_0$ وبالتالي يكون :

$$\varphi(t_0) \leqslant \alpha + \beta \int_{0}^{t_0} \varphi(s)\, ds < \alpha + \epsilon + \beta \int_{0}^{t_0} \psi(\tau)\, d\tau = \psi(t_0)$$

وهذا التناقض يؤكد أن $\psi > \varphi$ في J . ولما كان $\epsilon > 0$ كيفي فإننا قد وصلنا إلى المطلوب .

إن المبرهنة التالية تتعلق بمعادلة تفاضلية ذات جزء رئيسي خطي :

$$y' = Ay + g(t, y) \qquad (8)$$

بفرض أن g ، لاجل y صغير ، صغير بالمقارنة مع y .

(٤ ـ ٧) مبرهنة الاستقرار : لتكن الدالة $g(t, z)$ معرفة لاجل $o \leqslant t$ و $|z| \leqslant \alpha \; (\alpha > 0)$ ومستمرة . ولنفرض أن :

(9) $\frac{|g(t, z)|}{|z|}$ تسعى بانتظام إلى الصفر لاجل $o \leqslant t < \infty$ وذلك عندما $|z| \to o$ وبشكل خاص $g(t, o) = o$. ولنفرض أن المصفوفة A ثابتة وأن القسم الحقيقي لكل قيمة مميزة λ_i للمصفوفة A سالب . عندئذ يكون الحل $x(t) \equiv o$ للمعادلة التفاضلية (8) مستقراً مقارباً .

البرهان : استناداً إلى الفرض وإلى المبرهنة (٤ — ٣) يوجد ثابتان $c > 1$ و $\beta > 0$ بحيث يكون $-\beta > \operatorname{Re} \lambda_i$ ويكون :

$$|e^{At}| \leqslant c\, e^{-\beta t} \qquad t \geqslant 0$$

واستناداً إلى (9) يوجد عدد δ : $0 < \delta < \alpha$ بحيث يكون :

$$|g(t,z)| \leqslant \frac{\beta}{2c}|z| \quad \text{لاجل} \quad |z| \leqslant \delta ,\ t \geqslant 0 \tag{10}$$

ونبلغ المطلوب اذا اثبتنا مايلي :

$$|y(0)| \leqslant \epsilon < \frac{\delta}{c} \Rightarrow |y(t)| \leqslant c\,\epsilon\, e^{-\frac{\beta t}{2}} \tag{*}$$

وللقيام بذلك نذكر بأن كل حل للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة :

$$y' = Ay + b(t)$$

هو من الشكل :

$$y(t) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s)\, ds \qquad y_0 = y(0)$$

فإذا كان $y(t)$ حلاً لـ (8) ، فإنه يحقق اذن المعادلة التكاملية :

$$y(t) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\, g(s, y(s))\, ds$$

وبالتالي فإن هذا الحل ، استناداً إلى (10) ، يحقق المتباينة :

$$| y(t) | < | y_0 | c e^{-\beta t} + \int_0^t c e^{-\beta (t-s)} \frac{\beta}{2c} | y(s) | ds \qquad (11)$$

طالما (10) محققة ، أي طالما $| y | \leqslant \delta$. ليكن الآن $y(t)$ حلاً لـ (8) و $| y_0 | < \epsilon$ و $\varphi(t) = | y(t) | e^{\beta t}$. عندئذ ينتج من (11) (طالما $| y | \leqslant \delta$) :

$$\varphi(t) \leqslant c\epsilon + \frac{\beta}{2} \int_0^t \varphi(s) ds$$

واستناداً إلى مبرهنة جورتوول :

$$\varphi(t) \leqslant c\epsilon e^{\frac{\beta t}{2}} \quad \text{أو} \quad | y(t) | \leqslant c\epsilon e^{-\frac{\beta t}{2}} < \delta \qquad (12)$$

ينتج عن هذا أن $| y(t) |$ لايمكن أن يبلغ القيمة δ لأجل القيمة الموجبة لـ t ، وبالتالي فإن المتباينة (12) صحيحة والاقتضاء (*) صحيح (يمكن تمديد $y(t)$ إلى محيط منطقة تعريف g وبالتالي استناداً إلى (12) إلى كافة الفترة $0 \leqslant t < \infty$) .

(٤ – ٨) مبرهنة عدم الاستقرار (القلق) : لنفرض أن $g(t,z)$ يحقق شروط المبرهنة (٢ – ٧) ، ولتكن A مصفوفة ثابتة ، وليكن كذلك :

$$\text{Re}\,\lambda > 0$$

لأجل قيمة ذاتية λ واحدة على الأقل للمصفوفة A . عندئذ يكون الحل $x(t) \equiv 0$ للمعادلة التفاضلية (8) غير مستقر .

البرهـان : لننقل أولا المعادلة التفاضلية (8) بتحويل خطي مناسب إلى شكل

يلاحظ [illegible] الشكل [illegible] المصفوفة [illegible]
تكرار [illegible]
شاذة) [illegible]

$$B = C^{-1} A C = (b_{ij})$$

حيث يكون $b_{ii} = \lambda_i$ ويكون $b_{i,i+1}$ مساوياً الصفر أو 1 ويكون فيما سوى ذلك $b_{ij} = 0$. لتكن H المصفوفة القطرية :

$$H = \operatorname{diag}(\eta , \eta^2 , \dots , \eta^2) \qquad \eta > 0$$

ويمكن للمرء أن يجد بسهولة أن :

$$D = H^{-1} B \; H \Leftrightarrow b_{ij} \, \eta^{j-i}$$

أي أن $d_{ii} = \lambda_i$ و $d_{i,i+1}$ يساوي الصفر أو η ، وفيما سوى ذلك $d_{ij} = 0$.

فإذا وضعنا الآن $y(t) = CH \, z(t)$ فإن المعادلة التفاضلية (8) تتحول إلى الشكل :

$$z' = H^{-1} C^{-1} y' = H^{-1} C^{-1} [\, ACH z + g(t, CHz) \,]$$

أو :

$$z' = Dz + f(t, z) \qquad (13)$$

بفرض أن :

$$f(t, z) = H^{-1} C^{-1} g(t, CHz)$$

ومنه نرى أن f يحقق ، شأنه في ذلك شأن g ، الشرط (9) ، وذلك لأنه إذا كان $| z | \leqslant \in g(t, z)$ لأجل $\delta \geqslant | z |$ فإن :

$$|f(t,z)| \leqslant |H^{-1}C^{-1}|.|CH|\varepsilon|z|$$

لأجل $|CH| \delta / |z| < |$.

ويمكننا بدلاً من (13) أن نكتب :

$$z'_i = \lambda_i z_i \{+\eta z_{i+1}\} + f_i(t,z) \qquad i=1,\dots,n \qquad (14)$$

حيث لايرد الحد الراقع بين القوسين الكبيرين إلا عندما يكون الدليل i منتمياً إلى واحدة من مصفوفات جوردان فيها أكثر من سطر ، ولا توافق في مصفوفة جوردان هذه السطر الأخير .

لنرمز بـ j و k للأدلة التي يكون من أجلها :

$$Re\,\lambda_j > 0 \qquad Re\,\lambda_k \leqslant 0$$

و بـ φ و ψ للدالتين السلبيتين الحقيقيتين :

$$\varphi(t) = \Sigma_j |z_j(t)|^2 \quad , \quad \psi(t) = \Sigma_k |z_k(t)|^2$$

بفرض أن $z(t)$ حل لـ (13) . لنختر $\eta > 0$ صغيراً بحيث يكون :

$$0 < 6\eta < Re\,\lambda_j \quad \text{مهما كانت } j .$$

وليكن $\delta > 0$ صغيراً بقدر يكون فيه :

$$|f(t,z)|_0 < \eta |z|_0 \quad \text{لأجل} \quad |z|_0 \leqslant \delta$$

ليكن الآن $z(t)$ حلاً يحقق :

$$|z(0)|_0 < \delta \; , \; \psi(0) < \varphi(0) \qquad (15)$$

فعندئذ ، استناداً إلى (14) ، يكون :

$$\varphi' = 2\sum_j \mathrm{Re}\; z'_j \bar{z}_j = 2\sum_j (\mathrm{Re}\lambda_j z_j \bar{z}_j [\; + \eta\, \mathrm{Re}\, z_{j+1} \bar{z}_j] + \mathrm{Re}\bar{z}_j f_j(t, z)) \qquad (16)$$

طالما $|z(t)|_0 < \delta$ و $\psi(t) \leqslant \varphi(t)$

واستناداً إلى متباينة شفارتز (ملاحظين أن $j+1$ هو دليل من النمط j)

$$\sum \mathrm{Re}\, z_{j+1} \bar{z}_j \leqslant \sum | z_j z_{j+1} | \leqslant \sqrt{\sum | z_j |^2 \sum | z_j |^2} = \varphi$$

$$\sum \mathrm{Re}\, \bar{z}_j f_j \leqslant \sqrt{\sum | z_j |^2 \sum | f_j |^2} < \sqrt{\varphi}\, | f |_0$$

كذلك :

$$| f |_0 < \eta | z |_0 = \eta \sqrt{\varphi + \psi} \leqslant 2\eta\sqrt{\varphi}$$

إذن :

$$\tfrac{1}{2}\varphi' > 6\eta\varphi - \eta\varphi - 2\eta\varphi = 3\eta\varphi$$

وتصح لأجل $\psi(t)$ مساواة مماثلة لـ (16) (حيث نستبدل k بـ j فقط)، ومنه ينتج بالاسلوب نفسه وبسبب $\mathrm{Re}\, \lambda_k < 0$:

$$\tfrac{1}{2}\psi' \leqslant \eta\psi + 2\eta\varphi$$

عندئذ ، طالما $\psi(t) \leqslant \varphi(t)$ ، يكون .

$$\varphi' > 2\eta\varphi + w(t)$$

$$\psi' \leqslant 2\eta\psi + w(t)$$

$$\varphi(0) > \psi(0)$$

بفرض أن $w(t) = 4\eta\varphi$. وباجراء محاكمة مماثلة للتي مرت معنـــا في (٢ ـ ٥) من هذا الفصل بصدد الحديث عن الدالة العليا نجد :

$$\psi(t) < \varphi(t)$$

وهذا يعني أنه لايمكن أن يكون $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$. لذلك فإن كل حل $z(t)$ ، تحقق قيمه الابتدائية الشرط (15) ، يحقق $\psi(t) < \varphi(t)$ و $\varphi' > 6\eta\varphi$ طالما $|z(t)| < \delta$. وهكذا نجد $\varphi(t) \geqslant \varphi(0)e^{6\eta t}$. أي أن لكل حل من هذا النوع يوجد t_0 بحيث يكون $|z(t_0)| = \delta$ وهذا يؤدي إلى أن الحل $x(t) \equiv o$ غير مستقر .

(٤ ــ ٩) تطبيق على النظام :

$$y' = f(y) \qquad (17)$$

إن الطرف الأيمن لايتعلق بـ t بشكل صريح ، وهذا يعني أنه إذا كان $y(t)$ حلاً فإن $y(t + t_0)$ هو حل أيضاً . لنفرض أن $f(o) = o$ وأن كل مركبة f_i منشورة في متسلسلة قوى .

$$f_i(y_1, \dots y_n) = a_{i1} y_1 + \dots + a_{in} y_n + \dots$$

وعلى هذا فإننا بدلاً من (17) يمكننا أن نكتب :

$$y' = Ay + g(y) \qquad (18)$$

بفرض أن $A = (a_{ij})$ وأن $g(y)$ حدودية حدودها الأولى من الدرجة الثانية على الأقل . ويصح بالنسبة لـ g الشرط (9) .

واستناداً إلى مبرهنة الاستقرار (٤ - ٧) نرى أن الوضع $x \equiv o$ مستقر مقارب إذا كان الأمر كذلك لأجل المعادلة الخطية (2) . وإستناداً إلى (٤ ـ ٨) يكون هذا الموضع غير مستقر عندما يكون $Re\,\lambda > 0$ لأجل قيمة ذاتية لـ A .

وفي الحالة التي يكون فيها $\max Re\,\lambda_i = 0$ فإننا لانستطيع أن نعطي نتيجة محددة . وفي سبيل هذا الهدف ننظر في المثال التالي :

(٤ ـ ١٠) **مثال** : ليكن $n = 1$ وليكن :

$$y' = \alpha y + \beta y^3 \qquad (\alpha , \beta \in \mathbb{R})$$

ان المعادلة الخطية الموافقة $y' = \alpha y$ وان سلوك الاستقرار للحل $y = 0$ نجده في الجدول التالي :

	المعادلة الخطية	المعادلة غير الخطية
$\alpha < 0$	استقرار مقارب	استقرار مقارب
$\alpha > 0$	عدم استقرار	عدم استقرار
$\alpha = 0$	استقرار	استقرار مقارب إذا كان $\beta < 0$
		استقرار إذا كان $\beta = 0$
		عدم استقرار إذا كان $\beta > 0$

(٤ ـ ١١) **مبرهنة جرونوول المعممة** : لنفرض أن الدالة ذات القيم الحقيقية $\varphi(t)$ مستمرة في $J = [o, a]$ وأن :

$$\varphi(t) \leqslant \alpha + \int_0^t h(s)\, \varphi(s)\, ds$$

في J . بفرض أن $\alpha \in \mathbb{R}$ وأن $h(t)$ غير سالب ومستمر في J (يكفي

أن يكون كمولاً وفق لوبيغ) . عندئذ يكون :

$$\varphi(t) < \alpha e^{\int_0^t h(s)\,ds}$$

نترك البرهان للقارىء ، وعليه في سبيل ذلك أن يشكل دالة $\varphi(t)$ تحقق المعادلة التكاملية :

$$\psi(t) = \alpha + \epsilon + \int_0^t h(s)\,\psi(s)\,ds$$

ويثبت أن $\psi > \varphi$.

(٤ ــ ١٢) تمارين :

(آ) ليكن لدينا نظام المعادلات التفاضلية (في $\mathbb{R}$ أو C) .

$$y' = A\,y + g(t, y)$$

بفرض أن A مصفوفة ثابتة وأن $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$ مهما كانت القيمة الذاتية λ للمصفوفة A . ليكن بعد ذلك $g(t, y)$ مستمراً لاجل $t \geqslant 0$ و $y \in \mathbb{R}^n$ أو $y \in C^n$ و :

$$|g(t, y)| \leqslant h(t)\,|y|$$

بدالة $h(t)$ مستمرة (ويكفي أن تكون كمولة) لأجل $t \geqslant 0$. اثبت ان كل حل $y(t)$ يحقق :

$$|y(t)| \leqslant K\,|y(0)|\,e^{\alpha t + K\int_0^t h(s)\,ds}$$

بثابتة $K > 0$ مستقلة عن y .

ارشاد : أوجد لـ $\varphi(t) = e^{-\alpha t}|y(t)|$ معادلة تكاملية واستخدم مبرهنـــة جرونوول المعممة واستنتج من (آ) :

(ب) إذا كان $h(t)$ كمولاً على $0 \leqslant t < \infty$ وكان لجميع القيم الذاتية لـ A جزء حقيقي سالب ، فإن الحل $y \equiv 0$ مستقر مقارب . وتسعى بعد ذلك جميع الحلول نحو الصفر عندما $t \to \infty$.

(حـ) لنفرض في النظام الخطي :

$$y' = (A + B(t))\,y$$

أن $B(t)$ مصفوفة مستمرة لأجل $t \geqslant 0$ ، وأن :

$$\int_0^\infty |B(t)|\,dt < \infty$$

فإذا كان لجمع القيم الذاتية لـ A جزء حقيقي سالب فـــان الحل $y \equiv 0$ مستقر مقارب ٠



الفصل الخامس

المعادلات التكاملية الخطية

١ ـ مقدمة :

تلعب المعادلات التكاملية دوراً هاماً في كثير من حقول الميكانيك والفيزياء الرياضية وفي المعادلات التفاضلية التي تحقق شروطاً حدية معينة . كما أنها تعتبر أداة هامة في كثير من فروع التحليل مثل التحليل التابعي والطوريات العشوائية .

(١ ـ ١) تعريف : المعادلة التكاملية معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة تحت إشارة أو أكثر من اشارات التكامل . فمثلا ان المعادلات التالية :

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt \qquad (1)$$

$$g(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt \qquad (2)$$

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, [g(t)]^2\, dt \qquad (3)$$

بفرض أن (s) g الدالة المجهولة في حين بقية الدوال الواردة فيها معلومة ، هي معادلات تكاملية . ويقال عن المعادلة التكاملية انها خطية إذا كانت العمليات التي تخضع لها الدالة المجهولة في المعادلة هي عمليات خطية ، فالمعادلتان (1) و (2) خطيتان أما المعادلة (3) فليست خطية . وفي الواقع يمكن كتابة (1) و (2) بالشكل :

$$L[g(s)] = f(s)$$

بفرض أن L مؤثر تكاملي خطي مناسب . ومن الواضح أنه إذا كان c_1 و c_2 ثابتين فإن :

$$L[c_1g_1(s) + c_2 g_2(s)] = c_1 L[g_1(s)] + c_2[L g_2(s)]$$

وسيقتصر اهتمامنا في هذا الكتاب على نوعين رئيسيين من المعادلات التكاملية الخطية .

(١) معادلات فريدهولم الخطية : وهي معادلات من الشكل :

$$g(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt = f(s) \qquad (4)$$

وإذا كان الطرف الأيمن معدوماً فإننا نقول عن المعادلة (4) إنها معادلة فريدهولم المتجانسة المقابلة لـ (4) .

(٢) معادلات فولترا الخطية ، وهي معادلات من الشكل :

$$g(s) - \lambda \int_a^s K(s,t)\, g(t)\, dt = f(s) \qquad (5)$$

يسمى التابع K (s,t) في المعادلات (4) و (5) نواة المعادلة التكاملية .

(١ ــ ٢) تعريف : نقول عن تابع g إنه كمول تربيعياً على [a,b] ، أو أنه من L_2 فيما إذا كان :

$$\int_a^b | g(t) |^2 dt \quad < \infty$$

ونقول عن النواة K(s,t) انها كمولة تربيعياً على المربع $D(a \leq s \leq b, a \leq t \leq b)$ أو انها من L_2 فيما إذا كان :

$$\int_a^b \int_a^b | K(s,t) |^2 ds\, dt \qquad < \infty \tag{6}$$

$$\int_a^b | K(s,t)|^2 dt < \infty \qquad \forall s \in [a,b] \tag{7}$$

$$\int_a^b | K(s,t)|^2 ds < \infty \qquad \forall t \in [a,b]$$

ليلاحظ أن التوابع g,f,K الواردة في التعاريف السابقة هي توابع حقيقية أو عقدية ، إنما s و t هما متغيران حقيقيان .

٢ ــ معادلة فريدهولم التكاملية لنفرض فيما يلي أن النواة K(s,t) كمولة وكمولة تربيعياً على المربع $D(a \leq s \leq b, a \leq t \leq b)$ ، وأن التابع f(s) كذلك كمول وكمول تربيعياً على [a,b] .

ولنبدأ بحل معادلة فريد هولم التكاملية عندما تكون النواة متردية .

(٢ ــ ١) معادلة فريدهولم ذات النواة المتردية : نقول عن النواة K(s,t) انها متردية فيما إذا أمكن كتابتها على الشكل :

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(s)\, b_i(t) \qquad (8)$$

بفرض أن الدوال $a_1(s), \ldots, a_n(s)$ مستقلة خطياً وان الدوال $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ مستقلة خطياً كذلك .

بالتعويض في المعادلة (4) نجد :

$$g(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(s) \int_a^b b_i(t)\, g(t)\, dt \qquad (9)$$

وإذا فرضنا :

$$\int_a^b b_i(t)\, g(t)\, dt = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (10)$$

فإن المعادلة (9) تأخذ الشكل :

$$g(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(s) \qquad (11)$$

بالتعويض في (10) نجد :

$$\int_a^b b_i(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, a_j(t) \right] = c_i$$

وبفرض أن :

$$\int_a^b b_i(t)\, f(t)\, dt = f_i \qquad \int_a^b b_i(t)\, a_j(t)\, dt = x_{ij}$$

نجد :

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_j = c_i \qquad (12)$$

فمن أجل معادلة تكاملية مفروضة تكون النواة و f معروفتين وبالتـــالي نستطيع حساب الاعداد f_i و x_{ij} . وبذلك تكون مجموعة المعـادلة (12) هي مجموعة معادلات خطية بالمجاهيل c_i . فإذا استطعنا حل هذه المعادلات وإيجاد قيم c_i فإننا نعوض في (11) ونحصل على حل المعادلة التكاملية .

مثال: حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = \cos s + \lambda \int_{0}^{2\pi} [\sin s \cos t - \sin 2s \cos 2t + \sin 3s \cos 3t] g(t)$$

الحل : ان :

$$f(s) = \cos s \quad a_1(s) = \sin s \quad a_2(s) = -\sin 2s \quad a_3(s) = \sin 3s$$

$$b_1(t) = \cos t \qquad b_2(t) = \cos 2t \qquad b_3(t) = \cos 3t$$

وبالتالي فإن :

$$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t \cos t \, dt = \pi \qquad f_2 = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cos t \, dt = 0$$

$$f_3 = \int_0^{2\pi} \cos 3t \cos t \, dt = 0 \qquad x_{11} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, dt = 0$$

$$x_{12} = -\int_0^{2\pi} \cos t \sin 2t \, dt = 0 \qquad x_{13} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin 3t \, dt = 0$$

$$x_{21} = \int_0^{2\pi} \cos 2t \sin t \, dt = 0 \qquad x_{22} = -\int_0^{2\pi} \cos 2t \sin 2t \, dt = 0$$

$$x_{23} = \int_0^{2\pi} \cos 2t \sin 3t \, dt = o \qquad x_{31} = \int_0^{2\pi} \cos 3t \sin t \, dt = o$$

$$x_{32} = -\int_0^{2\pi} \cos 3t \sin 2t \, dt = o \qquad x_{33} = \int_0^{2\pi} \cos 3t \sin 3t \, dt = o$$

وتأخذ المعادلات (12) الشكل :

$$\pi = c_1 \qquad o = c_2 \qquad o = c_3$$

بالتعويض في (11) نجد الحل :

$$g(s) = \cos s + \lambda \pi \sin s$$

نستخلص مما سبق ان حل معادلة فريد هولم التكاملية ذات النواة المتردية يتحول إلى حل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية (12) في المجاهيل c_i . إن معين الأمثال لـ (12) هو :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda x_{11} & -\lambda x_{12} & \dots & -\lambda x_{1n} \\ -\lambda x_{21} & 1-\lambda x_{22} & \dots & -\lambda x_{2n} \\ \dots\dots & & & \\ -\lambda x_{n1} & -\lambda x_{n2} & \dots & 1-\lambda x_{nn} \end{vmatrix} \quad (13)$$

فإذا كان لهذا المعين قيمة غير مساوية للصفر فإن للمجموعة (12) حلاً وحيداً $c_1, c_2, \dots, c_n$ وبالتالي يوجد للمعادلة التكاملية (4) حل وحيد . وإذا كان $f(s) = o$ ، أي إذا كانت المعادلة التكاملية متجانسة فإن المجموعة (12) تصبح متجانسة ، ويكون حلها الوحيد هو الحل $c_1 = c_2 \dots = c_n = o$ والحل الوحيد للمعادلة التكاملية هو $g(s) = o$.

أما إذا كانت قيمة المعين $D(\lambda)$ مساوية للصفر فعندئذ لايكون للمجموعة (12) أي حل أو يكون لها عدد غير منته من الحلول ، الأمر الذي سنعالجه بعد قليل .

(٢ ــ ٢) المعادلة المتجانسة : وجدنا في الفقرة السابقة ان حل المعادلة المتجانسة:

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt \qquad (14)$$

يؤول إلى حل المجموعة المتجانسة من المعادلات الجبرية :

$$\sum_o^n (\delta_{ij} - \lambda x_{ij})\, c_j = o \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (15)$$

فإذا لم تكن λ حلاً المعادلة :

$$\det(\delta_{ij} - \lambda x_{ij}) = o \qquad (16)$$

فإنه ليس للمعادلة (14) سوى الحل الصفري $g(s) = o$.

نسمي كل قيمة لـ λ تحقق (16) قيمة ذاتية للنواة $K(s,t)$.

وإذا كانت λ قيمة ذاتية فإن للمعادلة (15) حلولاً مختلفة عن الحل الصفري $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = o$ ، وإذا نظرنا إلى كل حل $c_1, c_2, \ldots, c_n$ على أنه متجه c مركباته هي $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ فإن هذه الحلول تشكل فضاء متجهياً منتهي البعد $E_{(\lambda)}$. وإذا كان p عدد أبعاد هذا الفضاء فإن هناك p حلّاً مستقلا خطياً (15) .

$$c^{(j)} = (c_1^j, c_2^j, \ldots, c_n^j) \qquad j = 1, 2, \ldots, p \qquad (17)$$

ويكون كل حل لـ (15) هو تركيب خطي من هذه الحلول .

ان كل حل من الحلول (17) يعطينا بتعويضه في :

$$g(s) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(s) \qquad (18)$$

حلا لـ (14) . بذلك نحصل على p حلا لـ (14) لأجـــل القيمة الذاتية المفروضة . لتكن هذه الحلول هي $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(p)}$.

وبسبب خطية المعادلة (14) في الدالة المجهولة g فإن أي تركيب خطي من هذه الحلول هو حل لـ (14) .

ومن الواضح أنه إذا كان p حلا : $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(p)}$ لـ (14) مرتبطة بعلاقة خطية .

$$\mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)} + \ldots + \mu_p g^{(p)} = 0$$

فإن المتجهات $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$ المقابلة تكون مرتبطة بالعلاقة :

$$\mu_1 c^{(1)} + \mu_2 c^{(2)} + \ldots + \mu_c c^{(p)} = 0$$

وبالعكس ، وعلى هذا فإن لفضاء حلول المعادلة المتجانسة (14) البعد نفسه كما لفضاء حلول المجموعة (15) .

(٢ ـ ٣) المعادلة التكاملية المنقولة

نسمي المعادلة :

$$h(s) = l(s) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, h(t)\, dt \qquad (19)$$

منقول المعادلة التكاملية (4) . إن النواة في (19) لاتختلف عن النواة في (4) سوى أن s و t تبادلا موضعيها . فالمعادلة التكاملية :

$$h(s) = s^2 + \lambda \int_0^1 (s^2 - t^2)\, h(t)\, dt$$

هي منقول المعادلة التكاملية :

$$g(s) = 3s + \lambda \int_0^1 (t^2 - s^2)\, g(t)\, dt$$

ان حل المعادلة (19) ، عندما تكون النواة متردية ، مكافيء لحل مجموعة المعادلات :

$$C_l - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_{kl}\, C_k = l_l \qquad (20)$$

وذلك بفرض أن :

$$C_i = \int_a^b a_i(s)\, h(s)\, ds \qquad l_i = \int_a^b a_i(s)\, l(s)\, ds$$

وبما أن معين الأمثال للمجموعة (20) لايختلف عن معين الأمثال لـ (15) ، فإن القيم الذاتية للنواة K(s,t) لاتختلف عن القيم الذاتية للنواة K(t,s) . ينتج عن هذا أنه إذا كان للمعادلة (4) حل وحيد فإن للمعادلة (19) كذلك حلا وحيداً .

(٢ ــ ٤) مبرهنة فريدهولم :

لنفرض الآن أن λ قيمة ذاتية للنواة K(s,t) ، عندئذ يكون لمجموعة

المعادلات (15) حل غير الحل الصفري ، وتشكل مجموعة الحل فضاء متجهياً $E_{(\lambda)}$ ، كما أنه يكون لمجموعة المعادلات (20) حل غير الحل الصفري ، وتشكل مجموعة الحل فضاء متجهياً $E'_{(\lambda)}$. ويكون عدد أبعاد $E_{(\lambda)}$ مساوياً لعدد أبعاد $E'_{(\lambda)}$.

لتكن :

$$C^{(j)} = (C_1^{(j)} , C_2^{(j)} , \dots , C_n^{(j)}) \qquad (j = 1 , 2 , \dots ,p) \qquad (21)$$

قاعدة لـ $E'_{(\lambda)}$. عندئذ يعطينا كل حل من هذه الحلول بتعويضه في .

$$h (s) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \, b_i \, (s)$$

حلا $h^{(j)}$ للمعادلة المتجانسة الموافقة لـ (19) . إن الحلول $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots h^{(p)}$ مستقلة خطياً وتشكل قاعدة لفضاء حلول هذه المعادلة .

نعلم من أبحاث الجبر الخطي انه يلزم ويكفي كي يكون للمعادلة (12) حل ، عندما يكون معين الأمثال معدوماً ، هو أن يتعامد المتجه $f = (f_1 , f_2 ,\dots , f_n)$ مع جميع المتجهات $C^{(j)}$ ، أي أن يتحقق الشرط :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \, C_i^{(j)} = o \qquad (j = 1 , 2 , \dots ,p)$$

وبما أن :

$$f_i = \int_a^b b_i \, (t) \, f \, (t) \, dt$$

فإننا نجد :

$$\sum_{i=1}^{n} C^{(j)} \int_a^b b_i(t)\, f(t)\, dt = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} C_i^{(j)} b_i(t) \right] f(t)\, dt = o$$

إذن :

$$\int_a^b h^{(j)}(t)\, ft\, dt = o \qquad (j = 1,2, \dots , p)$$

وإذا ماتحققت هذه الشروط فعندئذ يكون للمعادلة (4) حل . انفرض أن g_0 حل خاص لهذه المعادلة ، واننا أجرينا التحويل :

$$g = g_0 + G$$

نعوض في (4) فنجد :

$$G = \lambda \int_a^b K(s,t)\, G(t)\, dt$$

والحل العام للأخيرة هو تركيب خطي من الحلول المستقلة خطيـاً $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots g^{(p)}$ ، أي :

$$G = \mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)} + \dots + \mu_p g^{(p)}$$

فالحل العام لـ (4) هو :

$$g = g_0 + \mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)} + \dots + \mu_p g^{(p)}$$

نستخلص من كل ماسبق مبرهنة فريدهولم التالية :

إذا كان لدينا المعادلة :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt \qquad (21)$$

فإننا نميز بين حالتين :

(آ) λ ليست قيمة مميزة للنواة K . عندئذ يكون للمعادلـــة التكاملية المتجانسة ولمنقولها الحل الصفري فقط ، ويكون المعادلة (21) ولمنقولها حل وحيد

(ب) λ قيمة مميزة لـ K عندئذ يكون المعادلة المتجانسة الموافقة لـ (21) حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء ذا بعد منته كما يكون لمنقول هذه المعادلة المتجانسة كذلك حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء، له البعـــد نفسه . وإذا كانت $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots g^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الأولى و $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الثانية ، فعندئذ يلزم ويكفي كي يكون لـ (21) حل هو أن تتحقق الشروط :

$$\int_a^b h^{(j)}(t)\, f(t)\, dt = o \qquad (j = 1,2, \dots, p)$$

ويكون الحل العام عندئذ هو حاصل جمع حل خاص إلى تركيب خطي من الدوال $g^{(j)}$.

مثال(١) حل المعادلة التكاملية .

$$g(s) = \lambda \int_{-1}^{1} (5\, s\, t^3 + 4\, s^2 t + 3\, st)\, g(t)\, dt$$

الحل : نرى في هذه المعادلة أن :

$$a_1(s) = 5\,s \qquad a_2(s) = 4\,s^2 \qquad a_3(s) = 3s$$

$$b_1 = t^3 \qquad b_2(t) = t \qquad b_3(t) = t$$

وبالتالي فإن :

$$x_{11}=\int_{-1}^{1} t^3\,(5t)\,dt=2 \quad x_{12}=\int_{-1}^{1} 4\,t^5\,dt=0 \quad x_{31}=\int_{-1}^{1} 3\,t^4\,dt=\frac{6}{5}$$

$$x_{21}=x_{31}=\int_{-1}^{1} 5t^2dt=\frac{10}{3} \quad x_{22}=x_{32}=\int_{-1}^{1} 4t^3dt=0 \quad x_{23}=x_{33}=\int_{-1}^{1} 3t^2\,dt=2$$

وإن المعادلات التي تعين c_i هي :

$$(1-2\lambda)\,c_1 \qquad -\frac{6}{5}\,\lambda c_3=0$$

$$-\frac{10}{3}\,\lambda c_1+c_2 \qquad -2\,\lambda\,c_3=0$$

$$-\frac{10}{3}\,\lambda\,c_1 \qquad +(1-2\lambda)\,c_3=0$$

ومعين الأمثال لهذه المجموعة يساوي :

$$D(\lambda)=1-4\,\lambda$$

وعلى هذا فهناك قيمة مميزة واحدة وهي $\lambda=\frac{1}{4}$. نعوض في المجموعة الأخيرة فنجد :

$$5\,c_1=3\,c_2 \qquad c_2=c_3$$

فالحل العام للمعادلة المذكورة :

$$g(s)=c_1\,(5\,s)+c_2\,(4\,s^2)+c_3\,(3s)$$

$$g(s)=4\,c_2\left(s^2+\frac{3s}{2}\right)$$

بفرض أن c_2 ثابت كيفي .

مثال (٢) بين أنه ليس للمعادلة التكاملية :

$$g(s) = f(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(s+t)\, g(t)\, dt$$

أي حل عندما $f(s) = s$ ، ولكن لها عدداً غير منته من الحلول عندما $f(s) = 1$.

الحل : ان :

$$a_1(s) = \sin s \qquad a_2(s) = \cos s \qquad b_1(t) = \cos t \qquad b_2(t) = \sin t$$

وبالتالي فإن :

$$x_{11} = x_{22} = 0 \qquad x_{12} = x_{21} = \pi$$

والمعادلات التي تعين c_i هي :

$$\begin{aligned} c_1 - \lambda \pi c_2 &= f_1 \\ -\lambda\pi c_1 + c_2 &= f_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

بفرض أن :

$$f_1 = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t\, dt \qquad f_2 = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t\, dt$$

وعلى هذا فإن :

$$D(\lambda) = 1 - \lambda^2 \pi^2$$

وهناك قيمتان مميزتان $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ و $\lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$. وعلى هذا فإن للمعادلة المفروضة عدداً غير منته من الحلول أو ليس لها أي حل حسبما تكون الشروط :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, h^{(j)}(t)\, dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

محققة أو غير محققة ، وذلك بفرض أن $h^{(j)}(s)$ تشكل قاعدة لفضاء الحلول للمعادلة المتجانسة الموافقة لمنقول المعادلة التكاملية المفروضة .

ولكن بما أن النواة متناظرة بالنسبة لـ s و t فإن هذه المعادلة المتجانسة هي المعادلات المتجانسة للمعادلة التكاملية المفروضة . لذلك نبدأ بحل المجموعة :

$$c_1 - \lambda \pi c_2 = 0$$

$$-\lambda \pi c_1 + c_2 = 0$$

لأجل $\lambda = \frac{1}{\pi}$. أي أن $c_1 = c_2$ ، فعدد أبعاد فضاء الحلول لهذه المجموعة يساوي الواحد وكذلك عدد ابعاد فضاء الحلول للمعادلة المتجانسة يساوي الواحد .

$$h^{(1)}(s) = g^{(1)}(s) = c_1' (\cos s + \sin s)$$

وشرط وجود الحل للمعادلة التكاملية هو :

$$\int_0^{2\pi} (\cos s + \sin s)\, f(s)\, ds = 0$$

فإذا كان $f(s) = s$ فإن .

$$\int_0^{2\pi} (\cos s + \sin s)\, s\, ds = -2\pi \neq 0$$

وليس للمعادلة التكاملية أي حل . أما إذا كان $f(s) = 1$ فإن :

$$\int_{0}^{2\pi} (\cos s + \sin s)\, ds = 0$$

فللمعادلة عدد غير منتة من الحلول

وإذا اردنا الوصول إلى هذه الحلول ، نلاحظ في هذه الحالة أن :

$$f_1 = \int_{0}^{2\pi} \cos t\, dt = 0 \qquad f_2 = \int_{0}^{2\pi} \sin t\, dt = 0$$

ويكون حل المجموعة (*) عندئذ هو $c_1 = c_2$ إذن الحل العام هو :

$$g(s) = f(s) + c_1 a_1(s) + c_2 a_2(s)$$

$$g(s) = 1 + c_1 (\cos s + \sin s)$$

بفرض أن c_1 ثابت كيفي .

(٢ ــ ٥) تمارين : أوجد القيم المميزة ثم أوجد حلول كل من المعادلات التالية:

$$g(s) = \lambda \int_{0}^{\pi} \cos(s + t)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = \lambda \int_{0}^{1} (2st - 4s^2)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = \lambda \int_{-1}^{1} (s \operatorname{ch} t - t^2 \operatorname{sh} s)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = s + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (s \cos t + t^2 \sin s + \cos s \sin t)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = \cos s + \lambda \int_{0}^{\pi} \sin(s - t)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = s + \lambda \int_{0}^{2\pi} |\pi - t| \sin s\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = \frac{6}{5}(1 - 4s) + \lambda \int_{0}^{1} (s \ln t - t \ln s)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_{0}^{1} (1 - 3st)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_{0}^{1} (s + t)\, g(t)\, dt$$

٣ ــ النواة الحالة : سنحاول في هذا البند استخدام طريقة التقريبات المتتالية للوصول إلى حل لمعادلة فريدهولم . لنفرض أن كلا من الدالتين $f(s)$ و $K(s,t)$ كمولة تربيعياً .

ولنبدأ بالتقريب من المرتبة صفر :

$$g_0(s) = f(s) \qquad (1)$$

وبتعويض هذا التقريب في معادلة فريدهولم :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_{a}^{b} K(s,t)\, g(t)\, dt \qquad (2)$$

نجد التقريب من المرتبة الأولى :

$$g_1(s) = f(s) + \lambda \int_a K(s,t)\, g_0(t)\, dt \qquad (3)$$

نعوض في (2) فنحصل على التقريب من المرتبة الثانية وهكذا . ان التقريب من المرتبة (n+1) هو :

$$g_{n+1}(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, g_n(t)\, dt \qquad (4)$$

فاذا سعى $g_n(s)$ بانتظام إلى نهاية معينة عندما $n \to \infty$ ، فإن هذه النهاية هي الحل المطلوب . ولدراسة هذه النهاية نجري الحسابات بالتفصيل فنجد :

$$g_1(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt \qquad (5)$$

$$g_2(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt \qquad (6)$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b K(s,t) \left[\int_a^b K(t,x)\, f(x)\, dx \right] dt$$

ويمكن تبسيط هذه الصيغة إذا وضعنا :

$$K_2(s,t) = \int_a^b K(s,x) K(x,t)\, dx \qquad (7)$$

وبتغيير ترتيب المكاملة في (6) نجد :

$$g_2(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(s,t) f(t)\, dt \qquad (8)$$

وبشكل مماثل نجد :

$$g_3(s) = f(s) + \lambda \int_b^b K(s,t) f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(s,t) f(t)\, dt \qquad (9)$$

$$+ \lambda^3 \int_a^b K_3(s,t) f(t)\, dt$$

بفرض أن :

$$K_3(s,t) = \int_a^b K(s,x) K_2(x,t)\, dx \qquad (10)$$

وبمتابعة العمل نجد :

$$K_m(s,t) = \int_a^b K(s,x) K_{m-1}(x,t)\, dx \qquad (11)$$

والتقريب من المرتبة (n+1) لحل المعادلة التكاملية (2) هو :

$$g_n(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b K_m(s,t) f(t)\, dt \qquad (12)$$

ندعو $K_m(s,t)$ النواة المكررة الـ m ، وذلك بفرض أن $K_1(s,t) = K(s,t)$
وبالانتقال إلى النهايات عندما $n \to \infty$ نحصل على مايسمى متسلسلة ينومان :

$$g(s) = \lim_{n \to \infty} g_n(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(s,t)\, f(t)\, dt \qquad (13)$$

نرى من (11) أن :

$$K_m(s,t) = \int_a^b K(s,x) K_{m-1}(x,t)\, dx$$

$$= \int_a^b K(s,x) \int_a^b K(x,\tau) K_{m-2}(\tau,t)\, d\tau\, dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(s,x)\, K(x,\tau)\, dx \right] K_{m-2}(\tau,t)\, d\tau$$

$$= \int_a^b K_2(s,\tau) K_{m-2}(\tau,t)\, d\tau$$

وبمتابعة العمل على هذا النحو نجد :

$$K_m(s,t) = \int_a^b K_{m-1}(s,x)\; K(x,t)\, dx \qquad (14)$$

يبقى أن نعين الشروط التي تجعل من المتسلسلة الأخيرة متقاربة . لأجـــل ذلك نستخدم متراجحة شفارتز فنجد :

$$\left| \int_a^b K_m(s,t)\; f(t)\, dt \right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |K_m(s,t)|^2 dt \right) \int_a^b |f(t)|^2 dt \qquad (15)$$

وإذا فرضنا A نظيم f :

$$A^2 = \int_a^b | f(t) |^2 dt \qquad (16)$$

وإذا رمزنا بـ C_m^2 للحد الأعلى للتكامل :

$$\int_a^b | K_m(s,t) |^2 dt$$

فإن المتباينة (15) تأخذ الشكل :

$$| \int_a^b K_m (s,t) f(t) \, dt |^2 \leqslant C_m^2 A^2 \qquad (17)$$

نطبق الآن متباينة شفارتز على (14) فنجد :

$$| k_m (s,t) |^2 < \int_a^b | K_{m-1}(s,x) |^2 dx \int_a^b | K(x,t) |^2 dx$$

وبمكاملة طرفي هذه المتباينة بالنسبة لـ t وبفرض أن :

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b | K(x,t) |^2 dx \, dt \qquad (18)$$

نحصل على :

$$\int_a^b | K_m (s,t) |^2 dt \leqslant B^2 C^2_{m-1}. \qquad (19)$$

ومن هذه المتباينة الأخيرة نجد :

$$C_m^2 \leqslant B^{2m-2} C_1^2 \qquad (20)$$

ومن (17) و (20) نجد :

$$\left| \int_a^b K_m(s,t) f(t) dt \right|^2 \leqslant C_1^2 A^2 B^{2m-2} \qquad (24)$$

وعلى هذا فإن القيمة المطلقة للحد العام للمتسلسلة الواردة في (12) هو أصغر من $AC_1 |\lambda|^m B^{m-1}$ وهذا يعني أن المتسلسلة في (13) متقاربة بانتظـــام إذا كان :

$$|\lambda| B < 1 \qquad (22)$$

وهكذا نكون قد برهنا أن للمعادلة (2) حلا معطى بالصيغة (13) ، لأجل كل قيمة لـ λ تحقق الشرط (22) . لنفرض الآن أن لـ (2) حلين همـــا $g_1(s)$ و $g_2(s)$ أي :

$$g_1(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) g_1(t) dt$$

$$g_2(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) g_2(t) dt$$

وبالطرح وبفرض أن $\varphi(s) = g_1(s) - g_2(s)$ نجد :

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t) \varphi(t) dt$$

وبتطبيق متباينة شفارتز على هذه المعادلة نجد :

$$|\varphi(s)|^2 \leq |\lambda|^2 \int_a^b |K(s,t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ s نجد :

$$\int_a^b |\varphi(s)|^2 ds \leq |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds\, dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

أو :

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds \leq o \qquad (23)$$

واستناداً إلى (22) نجد أن $\varphi(s) \equiv o$ أي أن $g_1(s) \equiv g_2(s)$ ، وذلك بفرض أن $g_1(s)$ و $g_2(s)$ مستمران على $[a,b]$.

لننظر بعد ذلك في المتسلسلة :

$$K_1(s,t) + \lambda K_2(s,t) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(s,t) + \dots \qquad (24)$$

لقد تبين لنا بتطبيق متباينة شفارتز على (11) أن :

$$|K_m(s,t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-1}(s,x)|^2 dx \int_a^b |K(x,t)|^2 dx$$

وبالاستفادة من (20) وبفرض أن الحد الأعلى للتكامل :

$$\int_a^b |K(x,t)|^2 dx$$

هو C'^2 فإننا نجد .

$$|K_m(s,t)|^2 \leqslant B^{2m-4} C_1^2 C'^2$$

إذن :

$$|\lambda^{m-1} K_m(s,t)| < |\lambda|^{m-1} \frac{C_1 C'}{B^2} B^m$$

ومنه نلاحظ أن المتسلسلة (24) متقاربة اطلاقــاً إذا تحقق الشرط (22) .
لنرمز لمجموع المتسلسلة (24) بـ $R(s,t,\lambda)$. إن هـذا التابـع R تحليلي في λ يسمي النواه الحالة لـ $K(s,t)$.

$$R(s,t,\lambda) = K(s,t) + \lambda K_2(s,t) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(s,t) + \dots \qquad (25)$$

وبضرب طرفي هذه العلاقة بـ $K(x,s)$ والمكاملة بالنسبة لـ s نجد :

$$\lambda \int_a^b K(x,s) R(s,t,\lambda) ds = \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \dots$$

إذن :

$$R(s,t,\lambda) - K(s,t) = \lambda \int_a^b K(s,x) R(x,t,\lambda) dx \qquad (26)$$

كذلك يمكن أن نبرهن أن :

$$R(s,t,\lambda) - K(s,t) = \lambda \int_a^b K(x,t) R(s,x,\lambda) dx \qquad (27)$$

لنعد إلى المعادلة (2) ولنكتبها بالشكل :

$$\frac{g(s) - f(s)}{\lambda} = \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt \qquad (28)$$

وباستخدام (26) نجد :

$$\frac{g(s) - f(s)}{\lambda} = \int_a^b R(s,t,\lambda)\, g(t)\, dt - \lambda \int_a^b \int_a^b R(s,x,\lambda)\, K(x,t) g(t)\, dx\, dt$$

وبالاستفادة من (28) نستطيع أن نكتب :

$$\frac{g(s) - f(s)}{\lambda} = \int_a^b R(s,t,\lambda)\, g(t)\, dt - \int_a^b R(s,x,\lambda)\, [g(x) - f(x)]\, dx$$

ومنه :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R(s,t,\lambda)\, f(t) dt \qquad (29)$$

وهذا يعني أنه ليس لمعادلة فريدهولم المفروضة سوى الحل (29) . وبالعكس ان الدالة $g(s)$ المعطاة بـ (29) هي حل لمعادلة فريدهولم ، لأن :

$$\int_a^b K(s,x) g(x)\, dx = \int_a^b K(s,x) f(x)\, dx + \lambda \int_a^b \int_a^b K(s,x)\, R(x,t,\lambda)\, f(t)\, dx\, dt$$

وبالاعتماد على (26) نجد :

$$\int_a^b K(s,x) g(x)\, dx = \int_a^b R(s,t,\lambda)\, f(t) dt$$

ومنها نجد العلاقة :

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s,x)\, g(x)\, dx + f(s)$$

وهذا مانريد اثباته .

ومن الواضح أن الحل المعطى بـ (29) لايختلف عن الحـــل المعطى بمتسلسلة نيومان (13) . ويمكن التحقق من ذلك مباشرة . نحسب أولاً التكامل :

$$\int_a^b R(s,t,\lambda)\, f(t)\, dt$$

بعد تعويض الدالة الحالة بالمتسلسلة المعطاة بـ (24) ، والمكاملة حداً حداً .

امثلة :

١ – حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 e^{s-t}\, g(t)\, dt$$

مستخدماً النواة الحالة

الحـل : إن :

$$K_1(s,t) = e^{s-t}$$

$$K_2(s,t) = \int_0^1 e^{s-x}\, e^{x-t}\, dx = e^{s-t}$$

وإذا تابعنا نجد كذلك أن $K_n(s,t) = e^{s-t}$ مهما كان العدد الصحيح الموجب n . إذن :

$$\Gamma(s,t,\lambda) = K(s,t)(1+\lambda+\lambda^2+\dots) = \frac{e^{s-t}}{1-\lambda}$$

بفرض أن $|\lambda|<1$. فالنواة الحالة دالة تحليلية في λ ولكن بالتمديد التحليلي نجد ان بمدها تحليلي في المستوي كله باستثناء القيمة $\lambda = 1$. والحل المطلوب هو :

$$g(s) = f(s) - \frac{\lambda}{\lambda-1}\int_0^1 e^{s-t} f(t)\, dt$$

٢ – حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = 1 + \lambda \int_0^1 (1-3st) g(t)\, dt$$

مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية ، ثم أوجد النواة الحالة .

الحل : ننطلق من التقريب ذي المرتبة صفر $g_0(s) = 1$ فنجد :

$$g_1(s) = 1 + \lambda \int_0^1 (1-3st)\, dt = 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}s\right)$$

$$g_2(s) = 1 + \lambda \int_0^1 (1-3st)\left(1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}t\right)\right) dt = 1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}s\right) + \frac{1}{4}\lambda^2$$

... ...

$$g(s)=1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}s\right)+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^3\left(1-\frac{3}{2}s\right)+\frac{1}{16}\lambda^4+\frac{1}{16}\lambda^5\left(1-\frac{3}{2}s\right)+\ldots$$

أو :

$$g(s)=\left(1+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{16}\lambda^4+\ldots\right)\left(1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}s\right)\right)$$

ولكن المتسلسلة الهندسية متقاربة عندما $|\lambda|<2$ ، فإذا استبدلنا بهذه المتسلسلة مجموعها نجد :

$$g(s)=\frac{4+2\lambda(2-3s)}{4-\lambda^2}$$

وبالتمديد التحليلي نجد أن هذا الحل يصلح مهما كانت λ باستثناء $\lambda=\pm 2$.

وللحصول على النواة الحالة نبدأ بحساب النوى المتكررة .

$$K_1(s,t)=1-3st$$

$$K_2(s,t)=\int_0^1(1-3sx)(1-3xt)\,dx=1-\frac{3}{2}(s+t)+3st$$

$$K_3(s,t)=\int_0^1(1-3sx)\left[1-\frac{3}{2}(x+t)-3xt\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}(1-3st)=\frac{1}{4}K_1(s,t)$$

وبشكل مماثل نجد :

$$K_4(s,t)=\frac{1}{4}K_2(s,t)$$

$$K_n(s,t)=\frac{1}{4}K_{n-2}(s,t)$$

وبالتالي فإن :

$$\Gamma(s,t,\lambda) = K_1 + \lambda K_2 + \lambda^2 K_3 + \dots$$

$$= (1 + \tfrac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 + \dots) K_1 + \lambda (1 + \tfrac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 + \dots) K_2$$

$$= [(1+\lambda) - \frac{3}{2}(s+t) - 3(1-\lambda)st] / (1 - \tfrac{1}{4}\lambda^2) \quad |\lambda| < 2$$

(٣ ـ ١) تمارين

١ ـ اثبت أن حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = 1 + \lambda \int_0^\pi \sin(s+t)\, g(t)\, dt$$

يعطى بـ :

$$g(s) = 1 + [2\lambda \cos s + \lambda^2 \pi \sin s) / [1 - \tfrac{1}{4}\lambda^2\pi^2]$$

٢ ـ أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$g(s) = 2s + \lambda \int_0^1 (s+t)\, g(t)\, dt$$

بطريقة التقريبات المتتالية مكتفياً بالتقريب من المرتبة الثالثة .

٣ ـ اثبت مايلي :

$$K_m(s,t) = \int_a^b K_r(s,x)\, K_{m-r}(x,t)\, dx$$

٤ ـ أوجد متسلسلة نيومان للمعادلة التكاملية :

$$g(s) = \sin s - \tfrac{1}{4} s + \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi/2} s\, t\, g(t)\, dt$$

ه ـ لتكن لدينا المعادلة التكاملية .

$$g(s) = 1 + \lambda \int_0^1 s\, t\, g(t)\, dt$$

(آ) بين باستخدام العلاقة $B|\lambda|<1$ ان متسلسلة نيومان متقاربة عندما $|\lambda|<3$.

(ب) بين باستخدام طريقة النواة الحالة أن :

$$g(s) = 1 + s\,[\,\lambda/2 + \lambda^2/6 + \ldots\,]$$

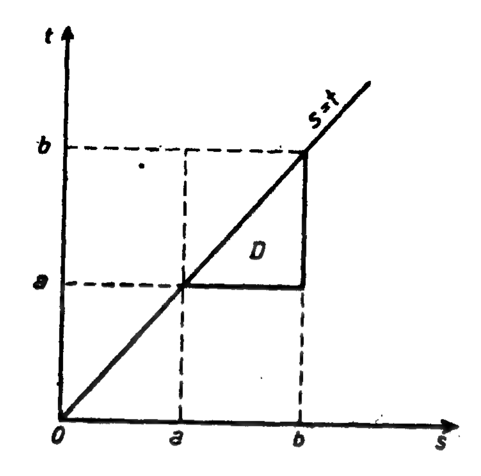
٤ ـ معادلة فولترا التكاملية

لقد دعونا المعادلة التكاملية من الشكل :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^s V(s,t)\, g(t)\, dt \qquad (1)$$

معادلة فولترا التكاملية . سنفرض فيما يلي أن النواة $V(s,t)$ مستمرة في المثلث Δ المحدد بالمستقيمات $s=b,\ t=a,\ s=t$ ، وعلى محيطه . ولنفرض كذلك أن f كمول وكمول تربيعياً على المجال $[a,b]$.

لحل المعادلة (1) يمكن ردها إلى معادلة فريدهولم بتعريف نواة جديدة $K(s,t)$ على النحو التالي :



$$K(s,t) = V(s,t) \qquad (\text{عندما } s \leqslant t)$$

$$K(s,t) = 0 \qquad (\text{عندما } s < t)$$

إن النواة $K(s,t)$ محدودة في المربع $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$ ومستمرة هناك باستثناء القطر $s = t$: ولذلك يمكن إيجاد الحل وفق طريقة الفقرة السابقة فنجد النوى المكررة التالية :

$$V_2(s, t) = \int_t^s V(s,x)\, V(x,t)\, dx \qquad (2)$$

وبشكل مماثل نجد :

$$V_{n+1}(s,t) = \int_t^s V(s,x)\, V_n(x,t)\, dx \qquad (3)$$

وإذا فرضنا أن الحد الأعلى ل V في Δ هو A أي :

$$|V(s,t)| < A$$

فإننا نجد اعتماداً على (2) :

$$| V_2 (s , t) | < (s - t) A^2$$

ونجد بشكل مماثل أن :

$$| V_n (s,t) | < \frac{(s - t)^{n-1} A^n}{(n - 1) !}$$

وإذا شكلنا النواة الحالة :

$$R (s , t , \lambda) = V (s,t) + \lambda V_2 (s,t) + \lambda^2 V_3 (s,t) + ...$$

فإننا نجد :

$$| \lambda^{n-1} V_n (s,t) | < \frac{| \lambda |^{n-1} (s-t)^{n-1} A^n}{n !} \leqslant \frac{| \lambda |^{n-1} (b-a)^{n-1} A^n}{n !}$$

ينتج عن هذا ان المتسلسلة متقاربة بانتظام في Δ مهما كانت λ ، وعلى هذا نستطيع القول : ان النواة الحالة لمعادلة فولتوا هي دالة صحيحة في λ . وبالتالي فإن لمعادلة فولتوا حلاً وحيداً مهما كانت قيمة λ ومهما كانت الدالة $f(s)$. ويعطى هذا الحل بدلالة النواة الحالة والدالة $f(s)$ وفق الصيغة :

$$g (s) = f(s) + \lambda \int_a^s R (s,t,\lambda) f(t) dt \qquad (4)$$

مثال (١) أوجد متسلسلة نيومان للمعادلة التكاملية :

$$g(s) = (1 + s) + \lambda \int_0^s (s - t) g (t) dt$$

الحل : ان :

$$V(s,t) = V_1(s,t) = s - t$$

$$V_2(s,t) = \int_t^s (s-x)(x-t)\,dx = \frac{(s-t)^3}{3!}$$

$$V_3(s,t) = \int_t^s \frac{(s-x)(x-t)^3}{3!}\,dx = \frac{(s-t)^5}{5!}$$

وهكذا ، إذن :

$$g(s) = (1+s) + \lambda\left(\frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!}\right) + \lambda^2\left(\frac{s^4}{4!} + \frac{s^5}{5!}\right) + \dots$$

فإذا كانت $\lambda = 1$ مثلا نجد أن $g(s) = e^s$.

مثال – ٢ – حل المعادلة التكاملية .

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^s e^{s-t}\, g(t)\, dt$$

الحل : نجد في هذا المثال أن :

$$V_1(s,t) = e^{s-t}$$

$$V_2(s,t) = \int_t^s e^{s-x}\, e^{x-t}\, dx = (s-t)\, e^{s-t}$$

$$V_3(s,t) = \int_t^s (x-t)\, e^{s-x} e^{x-t}\, dx = \frac{(s-t)^2}{2!}\, e^{s-t}$$

....

$$V_n(s,t) = \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{s-t}$$

والنواة الحالة هي :

$$R(s,t,\lambda) = \begin{cases} e^{s-t} \sum_{1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{n-1} (s-t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{(\lambda+1)(s-t)} & t < s \\ 0 & t > s \end{cases}$$

فالحل المطلوب هو :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_0^s e^{(\lambda+1)(s-t)} f(t)\,dt$$

(٤ ــ ١) تمارين

حل معادلات فولترا التكاملية التالية :

$$g(s) = 1 + \int_0^s (s-t) g(t)\,dt$$

$$g(s) = 29 + 6s + \int_0^s (6s - 6t + 5)\, g(t)\,dt$$

$$g(s) = e^{s^2} + \int_0^s e^{s^2-t^2} g(t)\,dt$$

$$g(s) = e^{s} + \int_0^s e^{s-t} g(t)\,dt$$

$$g(s) = \sin s + 2 \int_0^s e^{s-t} g(t)\,dt$$

$$g(s) = e^{s} \sin s + \int_0^s \frac{2 + \cos s}{2 + \cos t}\, g(t)\,dt$$

$$g(s) = s\,3^{s} - \int_{0}^{s} 3^{s-t}\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = e^{s^2 + 2s} + 2\int_{0}^{s} e^{s^2 - t^2}\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = \frac{1}{1 + s^2} + \int_{0}^{s} \sin(s - t)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = e^{-s} + \int_{0}^{s} e^{-(s-t)} \sin(s-t)\, g(t)\, dt$$

$$g(s) = 1 + s^2 + \int_{0}^{s} \frac{1 + s^2}{1 + t^2}\, g(t)\, dt$$

★ ★ ★

ثبت المصطلحات

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات المستعملة في هذا الكتاب مرتبة وفق حروف الهجاء العربية مع مقابل كل منها باللغة الانكليزية .

Cylindrical coordinates	احداثيات اسطوانية
Spherical coordinates	احداثيات كروية
Choice of contours	اختيار الطرق
Stability	استقرار
Asymptotic stability	استقرار تقاربي
Linear independence	استقلال خطي
Iteration method	اسلوب تكراري
Complete	تام
Functional analysis	تحليل دالي
Prüfer transformation	تحويل بروفر
Möbius transformation	تحويل موبيوس
Compactness	تراص
Contractive mapping	تطبيق تقلصي
Absolute convergence	تقارب مطلق
Uniform convergence	تقارب منتظم
Convergence in norm	تقارب نظيمي
Laplace's integral	تكامل لابلاس
Completeness	تمام

Analytic continuation	تمديد تحليلي
Lipshitz's constant	ثابتة ليبشتز
Equicontinous family	جماعة متساوية الاستمرار
Legendre's polynomial	حدودية لوجاندر
Trivial solution	حل تافه (بدهي)
Local solution	حل موضعي
Fundamental solutions	حلول أساسية
Contour integral solutions	حلول على شكل تكاملات محيطية
Periodic solutions	حلول دورية
Approximately linear	خطية تقريباً
Analytic funtion	دالة تحليلية
Eigen function	دالة ذاتية
Green's function	دالة غرين
Hypergeometric function	دالة فوق هندسية
Generating function	دالة مولدة
Fnnctional	دالية
Spherical functions	دوال كروية
Limit cycle	دورة حدية
Bessel's functions	دوال بسل
Test, criterion	رائز
Wronskian	رونسكي
Lipshitz condition	شرط ليبشتز
Local Lipshitz condition	شرط ليبشتز موضعي
Initial conditions	شروط ابتدائية

Recurrence formula	صيغة تدريجية
Rodrigues' formula	صيغة رودريج
Method of successive approximation	طريقة التقريبات المتتالية
Node	عقدة
Double node	عقدة مضاعفة
Euclidean space	فضاء اقليدي
Banach space	فضاء باناخ
Linear space	فضاء خطي
Normed linear space	فضاء خطي منتظم
Pre - Hilbert space	فضاء قبل الهيلبرتي
Metric space	فضاء متري
Normed space	فضاء منتظم
Hilbert space	فضاء هيلبرت
Pole	قطب
Eigen value	قيمة ذاتية
Principal value	قيمة رئيسية
Ascoli – Arzela theorem	مبرهنة اسكولي ارزيلا
Sturm's separation theorem	مبرهنة الفصل لشتورم
Éxpansion theorem	مبرهنة النشر
Fixed point theorem	مبرهنة النقطة الثابتة
Existence theorem	مبرهنة وجود
Peano's existence theorem	مبرهنة الوجود لبيانو
Shwarz's inequality	متباينة شفارتز
Triangular inequality	متباينة المثلث

Voltera equation	معادلة فولترا
Fredholm equation	معادلة فريدهولم
Fuchs's equation	معادلة فوكس
Fuchs's equation with one singularity	معادلة فوكس بنقطة شاذة واحدة
Fuchs's equation with two singularities	معادلة فوكس بنقطتين شاذتين
Hypergeometric equation	المعادلة فوق الهندسية
Laplace's equation	معادلة لابلاس
Legendre's equation	معادلة لوجاندر
Characterestic equation	معادلة مميزة
Fourier coefficients	معاملات فوريه
Operator	مؤثر
Bounded linear operator	مؤثر خطي محدود
self_adjoint operator	مؤثر متقارن ذاتياً
Asymptotic expansion	نشر مقارب
Orthonormal system	نظام متعامد منظم
The descriptive theory	النظرية الوصفية
Uniqueness theorems	نظريات الوحدانية
Existence theorems	نظريات الوجود
Norm	نظيم
Sup norm , Uuiform norm	نظيم القيمة العظمى
Weighting supnorm	نظيم القيمة العظمى المحملة
Branch point	نقطة تفرع
Equilibrium point	نقطة توازن
Critical point	نقطة حرجة

Spiral point	نقطة حلزونية
Saddle point	نقطة سرجية
Essential singular point	نقطة شاذة أساسية
Regular singular point	نقطة شاذة منتظمة
Irregular singular point	نقطة شاذة غير منتظمة
Isolated singular point	نقطة شاذة منعزلة
Ordinary point	نقطة عادية
Point at infinity	نقطة اللانهاية
Kernel	نواة
Resolvent kernel	نواة حالة
Degenerate kernel	نواة متردية
Iterated kernels	نوى متكورة
Symmetric kernel	نواة متناظرة
Uniqueness of solution	وحدانية الحل



المصادر

١ – سميرنوف ، دروس في الرياضيات العالية
ترجمة : و . قدسي ، ص . أحمد ، م . دعبول ، خ . أحمد ، أ . كنجو
وزارة التعليم العالي ، سوريا ، ١٩٧٠

2 — J. C. Burkill, The Theory of ordinary differential equations , oliver and Boyd 1962

3 — E. T. Copson : Theory of functions of a complex variable , oxford press, 1962

4 — I . M . Gelfand, G . E .Shilov , Generalized functions , Theory of differential equations , acadmic press 1967 .

5 — G . Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen , Sammlung Göshen , 1956

6 — E. L. Ince , Ordinary differential equation , London 1927

7 M. Krashov , A . Kiselev , G. Makarenko , Problems and exercises in integral equations , Mir Pub. 1971

8 — A . Lichnerowicz , Lineare Algebra und Lineare Analysis Deutsher Verlag der Wissenshaften 1956

9 — W . Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen , Eine Einführung , Springer Verlag 1976

10 — C . R . Wylie , Differential equations , Mcgraw Hill Company 1979

الفهرس

رقم الصفحة

رقم الصفحة

رقم الصفحة

رقم الصفحة

رقم الصفحة